



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

TESIS DOCTORAL

# APPLICATION OF MULTIOBJECTIVE EVOLUTIONARY TECHNIQUES FOR ROBUST PORTFOLIO OPTIMIZATION

AUTORA: **SANDRA GARCÍA RODRÍGUEZ**

DIRECTORES: DAVID QUINTANA MONTERO  
INÉS M. GALVÁN LEÓN

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Leganés, Diciembre de 2012

**Contact:**

Sandra García Rodríguez  
sandragrodriguez@gmail.com

TESIS DOCTORAL

APPLICATION OF MULTIOBJECTIVE EVOLUTIONARY  
TECHNIQUES FOR ROBUST PORTFOLIO OPTIMIZATION

Autora: Sandra García Rodríguez

Directores: Dr. D. David Quintana Montero  
Dra. Dña. Inés M. Galván León

Tribunal Calificador

Firma

Presidente: Dr. D. José Manuel Molina López

Vocal: Dr. D. Antonio Gaspar Lopes da Cunha

Secretario: Dr. D. David Camacho Fernández

Calificación: .....

Leganés, 20 de Diciembre de 2012.





UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

TESIS DOCTORAL

# APPLICATION OF MULTIOBJECTIVE EVOLUTIONARY TECHNIQUES FOR ROBUST PORTFOLIO OPTIMIZATION

AUTORA: SANDRA GARCÍA RODRÍGUEZ

DIRECTORES: DAVID QUINTANA MONTERO  
INÉS M. GALVÁN LEÓN

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Leganés, Diciembre de 2012



**A mi familia**

*Caminante, son tus huellas el camino y nada más.*  
Antonio Machado





# Agradecimientos

La realización de esta tesis doctoral ha supuesto una etapa muy importante en mi vida, un camino dentro del mundo de la investigación que he tratado de recorrer lo mejor que he sabido. Sin embargo, mi esfuerzo no habría sido suficiente para superar este periodo si no hubiese podido contar con el apoyo de mis más allegados, que han sabido compartir conmigo mis éxitos ayudándome a afrontar mis fracasos.

En primer lugar, deseo mostrar mi gratitud hacia mis dos directores de tesis, David e Inés, por todo el esfuerzo, paciencia y dedicación que han tenido hacia mi, pues su buena intuición ha servido para guiarme por el buen camino en las situaciones más adversas. Agradecer también a Ricardo, con el que di mis primeros pasos como investigadora, así como al resto de integrantes del grupo EVANNAI, cuya ayuda y compañerismo han facilitado y amenizado siempre mi trabajo. Moreover, I am also greatly indebted to professors H. Boström and M. Schoenauer for their generous help and guidance.

En especial deseo dirigir mi agradecimiento a mi padre, fuente de inspiración y “culpable” de mi dedicación al mundo de la investigación, y a mi madre, otro símbolo de admiración para mi. Tanto el uno como el otro han supuesto un apoyo incondicional a lo largo de todos estos años. A mi hermana Coral, que ha caminado continuamente a mi lado dispuesta a sujetarme en mis tropiezos, y a mis otras hermanitas, compañeras de juegos y de momentos inolvidables. Además quiero agradecer a la que considero mi segunda madre, que me quiere y ayuda siempre como si de su propia hija se tratara, sin olvidarme de mis cuatro abuelos, que han vivido y celebrado mis éxitos como si fueran suyos propios, y del resto de familia. Sin ellos nada es posible.

También quiero dar las gracias a Ben, mi principal fuente de energía y persona excepcional en todos los sentidos. A mi pandilla de siempre, por todos los años compartidos y por haber sido el mejor remedio contra la presión y el estrés. Igualmente recordar a mis amigos de la facultad y allegados, con quienes he recorrido la senda de la informática y que además me han brindado una amistad que continúa extramuros de la universidad.

Finally, I would like to thank all my friends that I made in Stockholm and Paris during my predoctoral stays. The moments that we enjoyed (and continue enjoying) together make me eternally grateful.

A todos ellos, mi más sincero agradecimiento.

Sandra García Rodríguez  
Madrid, otoño de 2012



# Resumen

Uno de los problemas básicos a los que se enfrenta un inversor es el de elegir la forma más adecuada de repartir el capital entre las distintas alternativas disponibles. Cada una de estas posibles combinaciones, denominadas carteras de inversión, se caracteriza por tener una serie de rasgos que las hacen más o menos deseables en función de las preferencias del interesado. Es por esto por lo que el problema de determinar la proporción de capital a asignar a cada tipo de activo financiero, la optimización de carteras de inversión, haya sido una de las cuestiones más abordadas en la literatura financiera. El marco teórico más influyente en este contexto fue propuesto por H. Markowitz, el cual sugiere evaluar las carteras en función de su riesgo y rendimiento asociado.

Por tanto, el problema expuesto puede considerarse como un problema de optimización multiobjetivo en el que se maximice el rendimiento de una cartera al mismo tiempo que se minimice su riesgo asociado. Estos objetivos son opuestos pues la maximización de uno implica también el incremento del otro, y viceversa. En consecuencia, la solución no está formada por un punto sino por un conjunto de varias carteras que presentan la mejor relación riesgo/rendimiento encontrada. Este frente, conocido como frontera eficiente, se ofrece al inversor para que éste pueda elegir la cartera que mejor se ajuste a sus preferencias. Sin embargo, cuando este problema se traslada al mundo real financiero, aparecen diferentes restricciones con las que no pueden lidiar los métodos clásicos de optimización, razón por la cual en esta tesis se hace uso de algoritmos multiobjetivo evolutivos ya que aportan la flexibilidad necesaria para tratar con este tipo de supuestos.

Una de las principales causas por las que los gestores de cartera desconfían de las técnicas automáticas de optimización es la falta de robustez que presentan sus soluciones. Ocurre que éstas pueden llegar a ser muy dependientes de las estimaciones para los parámetros, las cuales pueden no ser precisas debido a, por ejemplo, cambios bruscos en el entorno. Cuando esto sucede, las carteras pueden comportarse de una manera muy diferente a la esperada, lo que potencialmente podría conducir a decisiones de inversión gravemente equivocadas. Desafortunadamente, incluso si existen diversos métodos que mejoran la robustez de las carteras, se encuentran pocos que además tengan en cuenta las restricciones realistas asociadas.

Por este motivo, esta tesis doctoral aborda el problema de la optimización robusta de carteras mediante el uso de cuatro algoritmos evolutivos multiobjetivo. Concretamente se proponen y estudian tres enfoques que, adaptándose

a cada uno de los MOEAs utilizados, son capaces de generar carteras más estables que la versión estándar de los algoritmos o la estrategia robusta empleada por [Plerou et al., 2002]. El primero optimiza la robustez como objetivo adicional en el que enfrenta el individuo a diferentes escenarios; el segundo controla la estabilidad de manera implícita evaluando el riesgo y rendimiento de las nuevas carteras en parámetros diferentes cada generación; y el tercero amplía el método anterior añadiendo, entre otras cosas, una marca de tiempo mediante la cual se premien aquellas carteras que se mostraron más estables ante diferentes situaciones.

Por último, puesto que los indicadores de calidad habitualmente utilizados en el contexto de optimización multiobjetivo no dan una medida de la robustez de las soluciones, ha sido necesario definir nuevas métricas que además se han utilizado en la evaluación de los resultados.

# Abstract

The choice of the right way to distribute investor's wealth among different investment alternatives is one of the basic problems that investors must face. Each of these possible combinations, known as financial portfolios, have some characteristics that make them more or less desirable to the investor depending on his preferences. Therefore, this is the reason why the problem of determining the best proportion of capital to assign to each investment asset, the portfolio optimization, has been one of the core topics in financial management research. Academic literature on this subject is very large and mostly based on the seminal work of H. Markowitz, who suggests the evaluation of portfolios by computing their associated return and risk.

Hence, the mentioned problem can be considered as a multiobjective optimization problem where the goal is both maximizing return and minimizing risk of the portfolio at the same time. The opposing nature of these objectives provokes that maximizing one of them increments the other too, and viceversa. Thereby, the solution does not consist of a single asset allocation, but a range of them. These portfolios are the ones with the best risk/return trade-off found and define the Efficient Frontier. Thus, this set will be used by the decision maker to choose the portfolio that suits him better according to his preferences. Moreover, when this problem is studied within the real financial world, some constraints should be considered that cannot be hold by traditional optimization methods. This is the reason why we use evolutionary computation as it provides the flexibility necessary to deal with real-world scenarios.

One of the major reasons why some practitioners mistrust quantitative methods based on modern portfolio theory is the lack of robustness that show their solutions. Unfortunately, these portfolios may be very dependant on the estimates of parameters that are unlikely accurate due to, for instance, the presence of outliers. When it is the case, portfolios may behave in a unexpected way driving to wrong investment decisions. However, even if there are many methods to improve robustness in portfolios, this quantity is significantly reduced when also real-world constraints must be considered.

For this reason, we face the robust portfolio optimization problem using four evolutionary multiobjective algorithms (MOEAs). Moreover, we study three approaches that, adapted to MOEAs, are able to generate portfolios with more stability than the ones provided by standard versions or the robust strategy proposed by [Plerou et al., 2002]. The first one includes an explicit objective to measure robustness. The second technique handles robustness

implicitly evaluating risk and return of new portfolios under different parameters each generation. The last one improves the previous approach adding a time-stamping mechanism to encourage stable individuals.

Finally, since our aim is to deal with the lack robustness, we suggest five new metrics that we can utilise in this context, which were used to evaluate robustness of results.

# Índice general

<b>1. Introduction</b>	<b>1</b>
1.1. Goals . . . . .	5
1.2. PhD Evaluation . . . . .	6
1.3. Document Organization . . . . .	7
<b>2. Estado del arte</b>	<b>11</b>
2.1. Computación Evolutiva Multiobjetivo . . . . .	11
2.1.1. Computación Evolutiva . . . . .	12
2.1.2. Optimización Multiobjetivo . . . . .	16
2.1.3. Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo . . . . .	20
2.2. Teoría de Carteras . . . . .	32
2.2.1. Construcción de una cartera de inversión . . . . .	33
2.2.2. Teoría Moderna de Carteras . . . . .	34
2.3. Técnicas para la Optimización de Carteras . . . . .	41
2.3.1. La Computación Evolutiva en la Optimización de Carteras . . . . .	43
2.4. Robustez en la teoría de Carteras . . . . .	48
2.4.1. Primer Enfoque . . . . .	48
2.4.2. Segundo Enfoque . . . . .	50
<b>3. Planteamiento General de las Soluciones Propuestas</b>	<b>55</b>
3.1. Definición Formal del Problema Específico . . . . .	55
3.2. Motivación y Marco Teórico . . . . .	57
3.3. Estructura General . . . . .	59
3.3.1. Framework jMetal . . . . .	61
3.4. Cromosoma . . . . .	61
3.4.1. Codificación . . . . .	62
3.4.2. Reparación . . . . .	63
3.5. Función de Evaluación . . . . .	64
3.5.1. Remuestreo de Parámetros . . . . .	66

<b>4. Métodos de Evaluación de Resultados</b>	<b>69</b>
4.1. Conjunto de Datos. Ventana Deslizante . . . . .	69
4.2. Indicadores de Calidad . . . . .	71
4.2.1. Error de Estimación . . . . .	72
4.2.2. Estabilidad . . . . .	73
4.2.3. Rendimientos Inesperados . . . . .	74
4.2.4. Riesgo Extremo . . . . .	75
4.2.5. Distancia Euclídea . . . . .	76
4.3. Estudios Estadísticos . . . . .	77
<b>5. Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo</b>	<b>79</b>
5.1. Descripción y Función de Fitness . . . . .	79
5.2. Procesamiento de los Frentes Resultado . . . . .	82
5.3. Selección de Parámetros . . . . .	84
5.4. Resultados . . . . .	86
<b>6. Método de Evaluación con Remuestreo</b>	<b>95</b>
6.1. Descripción y Función de Fitness . . . . .	95
6.2. Selección de Parámetros . . . . .	97
6.3. Resultados . . . . .	99
<b>7. Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo</b>	<b>107</b>
7.1. Descripción y Función de Fitness . . . . .	107
7.2. Selección de Parámetros . . . . .	111
7.3. Resultados . . . . .	112
<b>8. Comparación de los Resultados</b>	<b>119</b>
8.1. Modelo de Comparación: <i>Random Matrix Approach</i> . . . . .	119
8.2. Comparación de Resultados . . . . .	124
8.3. Comparativa Segmentada . . . . .	130
<b>9. Conclusions and Future Work</b>	<b>137</b>
9.1. Conclusions . . . . .	138
9.2. Future Work . . . . .	141
<b>A. Related Publications</b>	<b>153</b>
<b>B. Otros Resultados</b>	<b>155</b>
B.1. Matriz Filtrada . . . . .	156
B.2. Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo . . . . .	157
B.3. Método de Evaluación con Remuestreo . . . . .	166
B.4. Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo . . . . .	170



# Índice de figuras

1.1. Shape of the Efficient Frontier . . . . .	2
1.2. Portfolios selected from NSGA-II and evaluated over the real and forecasted parameters . . . . .	4
2.1. Estructura general de un algoritmo evolutivo. . . . .	14
2.2. Esquema de ordenamiento de NSGA2 [Deb et al., 2002] . . . .	25
2.3. Comparación de asignación de fitness en SPEA y SPEA2 para un problema de maximización bi-objetivo. En la izquierda se muestra el método de SPEA y en la derecha el método de SPEA2, ambos sobre la misma población [Zitzler et al., 2001]	28
2.4. Ejemplo de una cartera de inversión . . . . .	33
2.5. Frontera Eficiente . . . . .	39
2.6. Rendimientos logarítmicos mensuales para la muestra <i>US do- llar</i> de 72 índices que cubre desde Enero de 1997 a Diciembre de 2002. Las nueve líneas verticales se corresponden con los nueve rendimientos más influyentes detectados por el <i>gross error sensitivity</i> [Perret-Gentil and Victoria-Feser, 2003]. . . .	49
3.1. Apariencia de la Frontera Eficiente . . . . .	58
3.2. Codificación de una cartera de inversión . . . . .	62
4.1. Esquema de la ventana deslizante para 8 activos financieros ( $x_{i,j}$ es el rendimiento correspondiente al periodo $i$ para el activo $j$ ). . . . .	70
5.1. Ejemplo de frente con 3 objetivos usando SPEA2. . . . .	82
5.2. SPEA2. Ventana temporal del 31/05/1996 al 28/04/2006. . . .	83
5.3. Comparación de resultados entre “Est”, “Alta”, “Media” y “Baja”. .	93
6.1. Comparación de resultados entre “Est” y “R”. . . . .	105
7.1. Ejemplo de procesamiento de un frente usando SPEA2. . . . .	110
7.2. Comparación de resultados entre “Est” y “R+T”. . . . .	118

8.1. Carteras optimizadas usando la matriz original $C$ (arriba) y la matriz filtrada $C'$ (abajo) [Plerou et al., 2002]. . . . .	121
8.2. Comparación de todos los resultados. . . . .	125
8.3. Ejemplo de división de un frente por regiones. . . . .	130

# Índice de tablas

4.1. Conjunto de Datos . . . . .	70
4.2. Ejemplo de tabla con medidas estadísticas . . . . .	77
4.3. Valores de significación estadística de A/B (A con respecto a B). . . . .	78
5.1. Parámetros. $L = 8$ (longitud del individuo). . . . .	85
5.2. Error de Estimación . . . . .	87
5.3. Estabilidad . . . . .	88
5.4. Rendimientos Inesperados . . . . .	89
5.5. Riesgo Extremo . . . . .	90
5.6. Distancias Euclídeas . . . . .	91
5.7. Test Estadísticos. Iguales para EE, ST, ER, ED-rendimiento y ED-riesgo. . . . .	92
5.8. Test Estadísticos. Rendimientos Inesperados. . . . .	92
6.1. Parámetros. $L = 8$ (longitud del individuo). . . . .	98
6.2. Error de Estimación . . . . .	100
6.3. Estabilidad . . . . .	101
6.4. Rendimientos Inesperados . . . . .	101
6.5. Riesgo Extremo . . . . .	102
6.6. Distancias Euclídeas . . . . .	103
6.7. Test Estadísticos de los indicadores de calidad. . . . .	104
7.1. Parámetros. $L = 8$ (longitud del individuo). . . . .	112
7.2. Error de Estimación . . . . .	113
7.3. Estabilidad . . . . .	114
7.4. Rendimientos Inesperados . . . . .	115
7.5. Riesgo Extremo . . . . .	115
7.6. Distancias Euclídeas . . . . .	116
7.7. Test Estadísticos de los indicadores de calidad. . . . .	117
8.1. RMA para 100 y 300 generaciones. <i>EE</i> , <i>ST</i> y <i>UR</i> . . . . .	122

8.2.	RMA para 100 y 300 generaciones. $ER$ , $ED_{E(R)}$ y $ED_{\sigma^2}$ .	123
8.3.	Resumen de resultados. SPEA2 y NSGA-II.	128
8.4.	Resumen de resultados. SMPSO y GDE3.	129
8.5.	SPEA2. Validación para el intervalo [1.1.2.1] en $EE$ , $ST$ y $UR$ .	132
8.6.	SPEA2. Validación para el intervalo [1.1.2.1] en $ER$ , $ED_{E(R)}$ y $ED_{\sigma^2}$ .	134
8.7.	SPEA2. Validación para el intervalo [2.1,3.1].	135
8.8.	SPEA2. Validación para el intervalo [3.1.4.1].	136
B.1.	Matriz Filtrada. 150 generaciones. 200 individuos. Indicadores de Calidad	156
B.2.	Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5). 150 generaciones. 100, 200 y 500 individuos. $EE$ .	157
B.3.	Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5). 150 generaciones. 100, 200 y 500 individuos. $ST$ .	158
B.4.	Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5). 150 generaciones. 100, 200 y 500 individuos. $UR$ .	159
B.5.	Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5). 150 generaciones. 100, 200 y 500 individuos. $ER$ .	160
B.6.	Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5). 150 generaciones. 100, 200 y 500 individuos. $ED_{E(R)}$ .	161
B.7.	Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5). 150 generaciones. 100, 200 y 500 individuos. $ED_{\sigma^2}$ .	162
B.8.	Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5). 300 generaciones. 100, 200 y 500 individuos. $EE$ y $ST$ .	163
B.9.	Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5). 300 generaciones. 100, 200 y 500 individuos. $UR$ y $ER$ .	164
B.10.	Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5). 300 generaciones. 100, 200 y 500 individuos. $ED_{E(R)}$ y $ED_{\sigma^2}$ .	165
B.11.	Método de Evaluación con Remuestreo. SPEA2 sin restricciones. 50, 100 y 200 individuos.	166
B.12.	Método de Evaluación con Remuestreo (capítulo 6). 100 generaciones. 50 y 500 individuos. $EE$ y $ST$ .	167
B.13.	Método de Evaluación con Remuestreo (capítulo 6). 100 generaciones. 50 y 500 individuos. $UR$ y Riesgo Extremos.	168
B.14.	Método de Evaluación con Remuestreo (capítulo 6). 100 generaciones. 50 y 500 individuos. $ED_{E(R)}$ y $ED_{\sigma^2}$ .	169
B.15.	Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo (capítulo 7). 300 generaciones. 100 y 500 individuos. $EE$ y $ST$ .	170
B.16.	Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo (capítulo 7). 300 generaciones. 100 y 500 individuos. $UR$ y Riesgo Extremos.	171

B.17.	Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo (capítulo 7).	
	300 generaciones. 100 y 500 individuos. $ED_{E(R)}$ y $ED_{\sigma^2}$ . . . .	172
B.18.	Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo (capítulo 7).	
	150 generaciones. 100, 200 y 500 individuos. $EE$ y $ST$ . . . .	173
B.19.	Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo (capítulo 7).	
	150 generaciones. 100, 200 y 500 individuos. $UR$ y $ER$ . . . .	174
B.20.	Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo (capítulo 7).	
	150 generaciones. 100, 200 y 500 individuos. $ED_{E(R)}$ y $ED_{\sigma^2}$ . .	175



# Capítulo 1

## Introduction

Nowadays in the financial world there is a wide range of investment instruments, making the choice of the appropriate way to distribute investor's wealth among them one of the main problems that investors must face. Each of these possible combinations, known as financial portfolios, have some characteristics that make them more or less desirable to the investor depending on his preferences. For this reason, the search of the optimal financial assets to be included in a portfolio and the proportion of capital in each of them, the portfolio optimization, has been one of the core topics in financial management research. The complexity involved in the process have led to the professionalization of the task, which is often carried out by a so called, portfolio manager.

Academic literature on this subject is very large and mostly based on the seminal work of H. Markowitz on his “Modern Portfolio Theory” (MPT). MPT is a theoretical framework that builds on the notion that diversification may lead to sets of assets that collectively have a lower risk than any of them individually, this might happen if the returns of different assets offset one another (they tend to change this value in opposite ways). According to this theory, investors try to maximize the portfolio expected return for a given amount of risk, or minimize the risk for a specific level of expected return, by carefully choosing the proportions denoted to each asset in their portfolio.

In his work, Markowitz suggests using a mean-variance optimization fra-

mework which defines the portfolio optimization as a multiobjective problem where investors try to figure out the weight that each of the investment alternatives should carry in the portfolio; so that it requires the simultaneous satisfaction of maximizing the expected return and minimizing the risk (variance). These two objectives are in conflict so that the solution to their optimization problem defines a set of points called the “efficient frontier” (its shape is shown in figure 1.1), it consists of portfolios that are neither better or worse than the rest but, for each level of risk or return, it is sure that there is no better alternative in terms of the other objective. Once this set has been identified, it is up to the decision maker to choose the portfolio that suits him better according to his preferences.

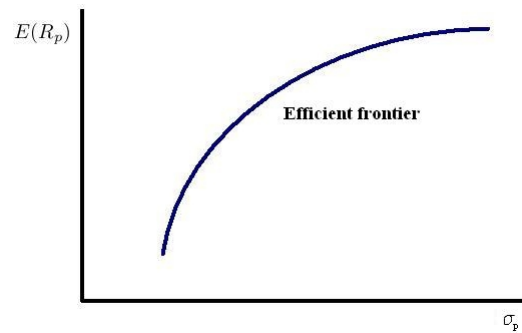


Figura 1.1: Shape of the Efficient Frontier

The problem presented by Markowitz is based on a set of simplified assumptions that can be solved by traditional techniques for instance, quadratic programming (QP). Unfortunately, the real investment world is not compatible with some of them, so that new realistic assumptions that highly increase the complexity of the model must be taken into account. From this point two lines of research have been followed (both of them described in chapter 2). Basically, the first one is about the investigation of operations on different mathematical tools (like cone programming); however, even if it quickly achieves good solutions, there is one point where the mathematical complexity of the real world problem is extremely difficult to handle. The second alternative based on metaheuristics (such as evolutionary computation) is getting traction on this area as it provides the flexibility necessary to deal



with real-world scenarios. The approaches based on the latter mostly falls into one these two categories: solutions that transform the multiobjective problem into a single-objective form and those which deal with it using multiobjective algorithms. This PhD uses a framework of multiobjective evolutionary algorithms (MOEAs) as they do not suffer from the mentioned related to real investment world.

Despite the amount of research on portfolio optimization, there are still open issues to deal with and a key one is the robustness of portfolios provided by algorithms. Regardless of the method chosen to find the efficient frontier, the process of optimizing the risk and return of a portfolio relies on two parameters: the estimates for the expected asset returns and the variance-covariance matrix. Given the inherent difficulty to the problem of forecasting the return of assets, it is logically that these parameters are inaccurate. As their values are highly dependent on the estimations which are usually based on past data, their forecasts might be extremely inaccurate due to, for instance, the presence of outliers. This lack of accuracy may generate portfolios that behave in a different way than the expected so that, the deviations of the selected set of portfolios over the real ones (observed a posteriori) may be very substantial.

Figure 1.2 shows a real example that consists of a Pareto front where its solutions are evaluated under the forecasted parameters (symbol “+” on top) and the real ones observed a posteriori (represented with “x” at the bottom part). Those portfolios that were optimized for the most likely scenario (average return of each asset for a given period of time, and variance-covariance matrix computed for the same data) define the Pareto front showed at the top part of the figure. Nevertheless it is obvious that, once the risk and return are calculated using the observed parameters (real asset returns instead of their mentioned averages), their profiles may be very different.

As we mentioned before, one of the major issues in portfolio optimization is the sensitivity of the results to key parameters that may make the expected efficient frontier fall far from the real one, resulting on a bad risk/return trade-off in portfolios. So that, due to the fact that reliability is one of the most important factors that asset managers have to consider when they eva-

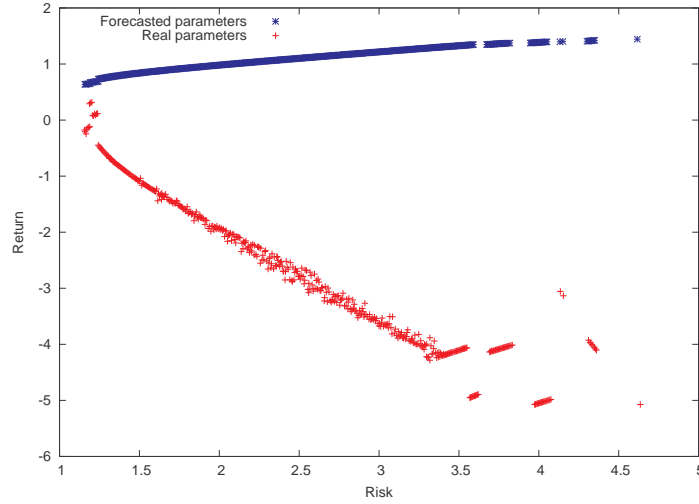


Figura 1.2: Portfolios selected from NSGA-II and evaluated over the real and forecasted parameters

luate the results, it is not unusual to find some partitioners who question the automatic portfolio optimization methods, and this is the reason why the search of solutions for this problem has defined the lines for the field of **robust portfolio optimization**. Unfortunately, even if there are many methods in literature that solve the common model of Markowitz, this quantity is highly reduced when robustness must be considered, finding very few techniques that also accept real-world constraints.

Two main ways have been used in literature to deal with the lack of stability in solutions that are analysed in chapter 2. The first one looks for robust estimates for parameters trying to filter them to control, for instance, the strong influence in computation of the extreme historical data. The second one manages the optimization process itself designing approaches that handle the uncertainty in parameters. Three alternatives have been suggested in this PhD dissertation which can be classified in the latter category. We consider that a reason for the lack of robustness in solutions might be that methods optimize just for a single scenario; as it consists of a set of expected asset returns and a single variance-covariance matrix, it is likely to result in getting solutions that might be extremely sensitive to deviations in parameters and this could potentially be a problem as it is almost certain that their estimates

will not be accurate.

Therefore, for the reasons mentioned above, we suggest three approaches which look for robustness optimizing their potential solutions in different feasible scenarios and favour those that consistently offer, in different ways, a good performance. The first one includes a third objective to measure the robustness, the second one evaluates solutions under resampling parameters and the third one uses a time-stamping mechanism. All of them, together with MOEAs, will drive the evolution process to find robust and stable solutions.

As the multiobjective algorithms do not give just one solution, but a set of non-dominated ones, it is important to choose the appropriate metrics to evaluate them. It is generally admitted that there is no ideal single metric that should be used to evaluate different objectives simultaneously in every circumstance; even if there are some metrics that are the most commonly used in this field (such as Hypervolume, Spread or SetCoverage), they are not appropriate to measure stability in the context of this work. For this reason, we design a set of six metrics that capture different aspects of robustness in efficient frontiers: *Error de Estimación* (Estimation Error), *Estabilidad* (Stability), *Riesgo Extremo* (Extreme Risk), *Rendimientos Inesperados* (Unrealized Returns) and a double metric *Distancia Euclídea* (Euclidean Distance) of return and risk.

## 1.1. Goals

After commenting the previous facts, different objectives have been set to be achieved in this PhD:

1. Design some approaches to deal with robustness in solutions with the following characteristics:
  - a) Able to find portfolios with higher stability than the rest of the techniques. These portfolios must be good in terms of risk and return as well.
  - b) Compatible and adaptable to different multiobjective evolutionary algorithms.

2. Use different multiobjective evolutionary algorithms to adapt the designed robust approaches to them.
3. Compare the results provided by the proposed strategies with:
  - a)* The standard version of the algorithms.
  - b)* Some techniques from literature that try to solve the problem of robustness in portfolio optimization.
4. Design some specific metrics able to evaluate robustness in non-dominated front solutions.

## 1.2. PhD Evaluation

In the correspondent chapters of this document, some experimental evaluation has been carried out over the following elements:

1. Three own implementation robust approaches:
  - a)* One that suggests extending the classic mean-variance optimization problem with a third explicit objective that controls the robustness (chapter 5).
  - b)* A technique which uses a resampling mechanism that deals with the uncertainty in parameters and the most robust results in efficient frontiers (chapter 6).
  - c)* A procedure with a resampling method based on time-stamping to control the uncertainty in parameters (chapter 7)
2. The standard versions of the algorithms NSGA-II, SPEA2, SMPSO and GDE3. As the proposed approaches mentioned above are compatible with a wide array of evolutionary multiobjective algorithms, they have been adapted to the same four meta-heuristics used in the experimentation. Given their different nature and behaviour, a set of popular algorithms have been chosen: two genetic algorithms confirmed to offer good performance in portfolio optimization (NSGA-II and SPEA2), a

multiobjective algorithm based on particle swarm optimization (SM-PSO), and a differential evolution strategy (GDE3).

3. A method taken from the literature (based on the random matrix theory) that increases the robustness in portfolios. It is also used to compare with our robust techniques.

With the aim of comparing the results under the same characteristics, every algorithm and approach have always been tested under the same sample. This set is taken from the source *Datastream* and consists of 240 monthly returns for eight broad financial indexes. Furthermore, over this sample, a sliding window technique has been used.

In order to evaluate the robustness in solutions, a set of metrics have been designed: Estimation Error, Stability, Extreme Risk, Unrealized Returns and the Euclidean Distance of return and risk.

## 1.3. Document Organization

This document is organized as follows:

- **Chapter 1 - Introduction**

The present chapter introduces the subjects of multiobjective evolutionary computation and financial portfolio optimization. We discuss how the first one can be used to solve the problem given by the second one and its utility when some constraints are taking into account. After giving a motivation for the development of this PhD, we speak about its contribution, goals and PhD evaluation procedure.

- **Chapter 2 - Estado del Arte**

We show the state of art related to the topic of this PhD. It is split in three parts; the first one speaks about the evolutionary computation and its field in multiobjective optimization, describing its most famous algorithms. In the second one we study the financial portfolio optimization problem from the economist point of view. And the third one

makes a study of different techniques to solve the portfolio optimization problem putting some emphasis on these ones that deal with the lack of robustness in solutions.

- **Chapter 3 - Planteamiento General de las Soluciones Propuestas**

This chapter is a general description of the three robust techniques suggested in this work; as all of them have some common characteristics, they are explained in this chapter in order not to repeat them each time a new robust approach is presented. First, we formally define the constrained problem that is solved. Then, we speak about the motivation of using this kind of methods describing their general and global structure. Finally, some information of the chromosome and fitness function is given.

- **Chapter 4 - Métodos de Evaluación de Resultados**

We describe the different steps followed to process and evaluate the results got by the techniques used in this work. First, we speak about the data set chosen to test the algorithms combining it with the sliding window technique. Then, we talk about the different metrics specially designed to evaluate robustness in solutions. Finally, we show the statistical test used to contrast the results.

- **Chapter 5 - Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo**

The first of the three mentioned approaches is introduced in this chapter, it uses an explicit third objective to deal with robustness during the evolution process. After explaining the motivation that drives to the using of this technique, we describe its specific fitness function and the processing applied to the final fronts that divides them in three parts. We also talk about the configuration parameters to carry out the experiments. In the last section, we show and analyse the most relevant experimental results which show the strength of this technique.

- **Chapter 6 - Método de Evaluación con Remuestreo**

This part develops the second robust technique. It increases the stability in solutions using a resampling method that changes, every generation, the parameters of the evolution process. We first give a motivation why we consider useful this approach. Second, the modifications done to adapt it to the basic algorithms are explained. Third, we describe the selected parameters to perform the experiments. And fourth, we discuss the results that are shown the results in tables.

- **Chapter 7 - Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo**

Finally, the third approach used to improve the robustness in portfolios is described in this part. It consists of combining the resampling method with the use of a time-stamp that is optimized as a third objective. As the previous chapter, after talking about the motivation, we describe the fitness function and modifications over the basic algorithms done by the mentioned time-stamping with resampling approach. The results are shown and discussed in the last section.

- **Chapter 8 - Comparación y Validación de los Resultados**

In this chapter we compare the results of the three techniques mentioned before over the standard formulation and other robust method based on random matrix theory. This new model is explained as well. With the aim of demonstrating the effectiveness of the robust approaches presented in this work, the metric values of the results are not only compared by fronts, but by ranges.

- **Chapter 9 - Conclusions and Future Work**

This part collects the most important conclusions that have been extracted across the research work and the proposed future lines of work to follow in the future.

- **Appendix A**

It shows the derived publications from this PhD.

- **Appendix B**

This PhD generated a lot of experimentation. Due to the lack of space,

and in order to preserve the readability of the document, only the most representative part of the experiments has been included in the correspondent sections of this document because the inclusion of all the results might confuse the reader. For this reason, for chapters 5, 6, 7 and 8 (that gather all the experimental work in which the conclusions of this PhD are based), a synthesis process has been carried out to identify and analyse just the most relevant and interesting results, it means, those ones that offer more information. As it is considered important to keep available all the results, they can be consulted in the Appendix A “Otros Resultados” of this dissertation.



## Capítulo 2

### Estado del arte

El estado del arte ha sido dividido en dos secciones principales.

La primera se centra en la computación evolutiva aplicada a la resolución de problemas con varios objetivos. Para comenzar, se explican sus orígenes así como todos los conceptos necesarios que faciliten su comprensión al lector. En segundo lugar se estudia la formulación de la optimización multiobjetivo. Por último se citan y analizan algunos de los algoritmos evolutivos más importantes dedicados a la resolución de estos problemas.

La segunda parte del estado del arte se centra en el problema concreto a resolver contemplado en esta tesis doctoral. En primer lugar, se habla sobre la “Teoría Moderna de Carteras” sin olvidar algunos conceptos financieros completamente necesarios para su comprensión. De igual modo se realiza un estudio sobre las diferentes técnicas de la computación evolutiva que han sido aplicadas en optimización de carteras. Y para terminar se habla de uno de sus mayores inconvenientes, la falta de robustez en las soluciones, examinando diferentes técnicas destinadas a lidiar con él.

#### 2.1. Computación Evolutiva Multiobjetivo

Con el fin de facilitar la comprensión de las técnicas computacionales en las que está basada esta tesis doctoral, esta sección comienza con la introducción al campo de la computación evolutiva aplicada a la resolución

de problemas multiobjetivo. Para ello, se describe el marco teórico de estas disciplinas a su vez que se citan y estudian en detalle algunos algoritmos utilizados para este fin y empleados en la experimentación.

### 2.1.1. Computación Evolutiva

La Computación Evolutiva fue originada en 1930 por W. D. Cannon. Es una rama de la Inteligencia Artificial inspirada en la biología que se creó con el fin de dar solución a problemas complejos de optimización. Para ello, interpreta la naturaleza como una gran máquina de resolver problemas y realiza un estudio de ella para encontrar el origen de dicha potencia y emplearla para conseguir respuestas. Sus principios se sustentan en la “Teoría Neo-Darwiniana de la Evolución” que se basa en la supervivencia de los individuos más fuertes de la Naturaleza tal y como define Charles Darwin en su libro *El origen de las especies por medio de la selección natural o la preservación de las razas favorecidas en su lucha por la vida* publicado en 1859. Este libro habla de la “Selección Natural o Supervivencia del más Adaptado” como el proceso de preservación de las características que favorecen a cada individuo, así como la eliminación de aquellas que sean perjudiciales para su especie. Sin embargo, una de las principales deficiencias del argumento de Darwin es que, a pesar de que la herencia juega un papel central en su teoría, ésta no explica su funcionamiento. Los principios de la selección natural se pueden resumir en cuatro proposiciones:

1. No todos los individuos de una especie logran reproducirse en una generación.
2. No todos los miembros de la especie son idénticos, sino que presentan variaciones individuales.
3. La mayoría de las variaciones son heredadas y transmitidas de los padres a los descendientes.
4. El éxito reproductivo no es aleatorio. sino que está asociado con las características heredadas; algunas de ellas más beneficiosas que otras en situaciones particulares.

Más tarde, dichas reglas de herencia son investigadas y explicadas por Weismann y Mendel. El biólogo alemán August Friedrich Leopold Weismann establece la “Teoría del Germoplasma” [Weismann et al., 1893] en la que sostiene que los organismos multicelulares están constituidos por células germinales (germoplasma) que contienen la información de la herencia, y células somáticas (somatoplasma) que se encargan de las funciones corporales.

Por su parte, Johann Gregor Mendel, de origen austriaco, publicó sus investigaciones en su libro *Experimentos de Hibridación en Plantas* [Mendel, 1901]. Del resultado de sus experimentos surgen las conocidas “Leyes de Mendel”:

1. *Ley de segregación*: los genes heredados de los padres se segregan (separan) durante la formación de gametos sin afectarse entre sí.
2. *Ley de independencia*: los pares de alelos se independizan durante la formación de gametos.
3. *Ley de la uniformidad*: cada característica heredada se determina mediante dos factores provenientes de ambos padres, lo cual decide si un gen determinado es dominante o recesivo.

La Computación Evolutiva emplea técnicas para resolver problemas de aprendizaje u optimización (ya sea numérica o combinatoria) que adaptan el modelo neo-darwinista creando un ciclo computacional con operaciones compuesto de varias etapas. Basados en la teoría de la “supervivencia del más fuerte”, los algoritmos evolutivos, a diferencia de otras técnicas de computación, trabajan con un conjunto de soluciones (denominada “población”) desde el principio. Cada solución perteneciente a este conjunto es conocida con el nombre de “individuo”, el cual lleva codificada su información generalmente en forma de vector. Existen diversos tipos de codificaciones tales como binaria, real, etc. De este modo, el algoritmo parte de una “población inicial” de soluciones que va evolucionando. Por cada iteración del bucle, se crea artificialmente un nuevo conjunto de individuos a partir del anterior considerando, para ello, el individuo más apto de la generación precedente y, ocasionalmente, generando aleatoriamente nuevas partes con la intención

de introducir diversidad en la población. El algoritmo consigue converger hacia soluciones buenas y factibles (aquellos puntos con mayor rendimiento en la función de evaluación) haciendo uso de forma eficiente de la información histórica a ser empleada en la nueva búsqueda [Goldberg, 1989].

Los elementos que intervienen en los AE son:

- **Representación.** Estructura de datos (denominadas *cromosomas*) que lleva codificada la información o parámetros (también conocidos como *genes*) de una posible solución a un problema. Estas estructuras (ver figura 2.1) pueden ser binarias, reales, etc. Un gen es un elemento de un cromosoma que codifica el valor de una sola variable. Así pues, el *genotipo* corresponde con la codificación del cromosoma y el *fenotipo* con la decodificación de éste.

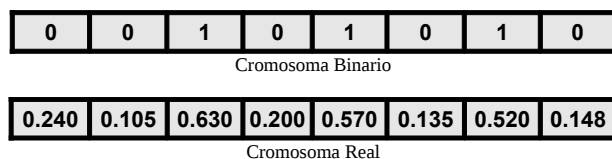


Figura 2.1: Estructura general de un algoritmo evolutivo.

- **Parámetros.** Valores empleados para simular el proceso evolutivo. Algunos de ellos pueden ser el tamaño de la población, probabilidad de aplicar un operador genético, número de generaciones, etc.
- **Población.** Conjunto de *individuos* (o soluciones) que codifican las variables de decisión con las que se calculan las funciones objetivo del problema. Cada individuo usa una representación de la información que simula una cadena cromosómica con una carga de información genética.
- **Función de Evaluación.** También conocida como *función de fitness* o *función de aptitud*. Es la encargada de evaluar el individuo (funciones objetivo). Esta función es específica para cada problema a resolver.

- **Operadores genéticos.** Manipulan y modifican la información genética de los individuos heredándola de dos o más padres y transmitiéndola a la descendencia. La reproducción entre cromosomas se realiza intercambiando segmentos de cadenas lineales de longitud fija. De este modo se promueve la diversificación entre elementos de la población. Se pueden clasificar en tres tipos:
  - *Selección.* Elige los individuos (basándose en su función de fitness) que serán utilizados por los operadores de mutación y cruce. Es la responsable directa de la supervivencia de los individuos en la siguiente generación.
  - *Cruce.* Partiendo de dos individuos, se combinan sus cromosomas para crear dos nuevos. Su aplicación selectiva sobre los individuos padre favorece la transmisión de las características de un progenitor a su descendencia aunque éstas sean mezcladas con las de otros individuos.
  - *Mutación.* Modifica al azar algunos genes con el fin de alcanzar soluciones no dadas en la población anterior produciendo individuos con pequeñas variaciones con respecto al individuo original.

De igual modo que en la selección natural, los algoritmos evolutivos incorporan un mecanismo que conserva durante todo el proceso de evolución a los individuos con mejor fitness sin aplicar ninguna operación genética sobre ellos. Este método es conocido como **elitismo** y se encarga simplemente de copiar el mejor individuo de una generación en la siguiente para evitar, así, que éste se pierda a causa del proceso evolutivo. De este modo, el mejor individuo de una generación siempre será igual o mejor al de su generación anterior. Así es como se asegura el comportamiento monotónico del máximo valor de la función de fitness por iteración siendo ésta una condición necesaria y suficiente para la convergencia del algoritmo.

Dentro de la computación evolutiva, se encuentran los **Algoritmos Genéticos** (AG), los cuales fueron creados a comienzos de 1960 por John H. Holland junto con más colaboradores y alumnos de la Universidad de Michigan. Se aplicaron inicialmente en la resolución de problemas de aprendizaje

máquina; para ello estudiaron el fenómeno de adaptación de sistemas naturales y artificiales del que abstraieron un primer modelo con las características básicas de un proceso evolutivo natural utilizándolo en un sistema computacional. Sus características principales son las siguientes:

- Representación (generalmente binaria) con doble forma de interpretación: a nivel de *genotipo* (carga genética heredada de sus antecesores) y a nivel de *fenotipo* (características visibles del individuo).
- La población inicial es habitualmente generada de manera aleatoria.
- Trabajan a escala genotípica sobre la representación elegida.
- El operador genético principal es el cruce. Suele emplear una probabilidad baja de mutación dejándola en segundo plano.
- Utilizan selección probabilística.

El algoritmo 1 muestra el esquema básico de funcionamiento de un AG. Al igual que en muchas otras heurísticas, el comportamiento del algoritmo genético es altamente dependiente de los parámetros iniciales (tamaño de la población, porcentaje de cruce, porcentaje de mutación, número de generaciones, etc.), por lo tanto es importante realizar un buen ajuste en los parámetros con el fin de mejorar la solución para los objetivos del problema.

---

**Algorithm 1** Proceso principal de un AG
 

---

```

Generar población inicial  $P$ .
Calcular el fitness de cada individuo  $i$  de la población  $P$ .
while no se cumpla el criterio de parada do
    Aplicar el operador de selección en  $P$  para conseguir  $P'$ .
    Aplicar el operador genético de cruce para todo  $i'$  de  $P'$ .
    Aplicar el operador genético de mutación para todo  $i'$  de  $P'$ .
    Incluir  $P'$  en  $P$ 
end while
  
```

---

### 2.1.2. Optimización Multiobjetivo

Para muchas disciplinas científicas, el procedimiento de resolver un problema o tomar una decisión se corresponde con hallar la mejor solución común

a un conjunto de relaciones (tal es el caso de la economía y finanzas, el diseño en ingeniería, la clasificación de patrones, etc.) [Coello and Lamont, 2004a]. Un ejemplo sencillo de esto puede presentarse al tratar de determinar las proporciones de ciertos componentes en un medicamento, teniendo en cuenta los menores costes de producción y buscando, a la vez, no reducir su eficacia y mostrarlo llamativo para una mayor cantidad de consumidores. Además, se debe tomar la decisión de añadir o no algún tipo de edulcorante al medicamento dado que esto podría afectar en mayor o menor grado a los aspectos anteriores. Otros muchos ejemplos se encuentran en el diseño y construcción de máquinas o piezas de la industria en donde se deben contemplar diferentes características referentes a un mismo producto, o incluso en finanzas cuando se desean tomar ciertas decisiones de inversión [Castillo Tapia and Coello, 2007]. Si cada una de estas relaciones puede expresarse como una función matemática, al referirnos a la mejora en conjunto, decimos que se deben optimizar todas las funciones de manera simultánea obteniendo, pues, un problema con varios objetivos a resolver.

Varios investigadores de prestigio [Coello, 1998, Fonseca and Fleming, 1993, Deb, 1999] han identificado algunas dificultades que tienen las técnicas clásicas para resolver este tipo de problemas. Éstas pueden ser:

- Es necesario ejecutar varias veces los algoritmos con el fin de encontrar varias soluciones del conjunto de óptimos de Pareto (ver sección 2.1.2).
- La mayoría de estos algoritmos requieren información sobre el dominio del problema que se trata.
- Algunos son sensibles a la forma o continuidad del frente de Pareto.
- En los problemas en los que existen eventos estocásticos, los métodos clásicos son inadecuados.
- La dispersión de las soluciones del frente de Pareto depende de la eficiencia del optimizador mono-objetivo.

Como se acaba de comentar, muchos de los problemas de optimización que se presentan en el mundo real son, naturalmente, multiobjetivo, lo que

quiere decir que suelen tener dos o más funciones objetivo que deben satisfacerse simultáneamente y que pueden estar en conflicto entre sí. De existir la posibilidad de combinar los diferentes objetivos y conociendo la mejor manera de hacerlo, se puede simplemente considerar la existencia de un único objetivo a optimizar resultante de la combinación de todos ellos. Por ejemplo, [Chiranjeevi and Sastry, 2007] emplea un algoritmo que transforma un problema de varios objetivos en uno solo para poder ser resuelto por algoritmos mono-objetivo. Concretamente, en lugar de considerar un objetivo como función de evaluación colocando los demás como restricciones del problema, incluye todos ellos en dicha función y los pondera. Sin embargo, lo usual es que no se conozca de qué manera combinar todos los objetivos o que ésta no sea la adecuada, es por ello que surge el concepto de “Problema de Optimización Multiobjetivo” o *Multiobjective Optimization Problem* (MOP) [Zitzler et al., 2004].

Por tanto, la optimización multiobjetivo se puede definir como el procedimiento para encontrar un vector de variables de decisión que satisfaga las restricciones dadas y optimice un vector de funciones cuyos elementos representan las funciones objetivo. Esas funciones forman una descripción matemática de los criterios a optimizar y generalmente se encuentran en conflicto entre sí. Por lo tanto, el término optimizar significa “encontrar las soluciones que darían valores aceptables para todas las funciones objetivo” [Osyczka, 1985].

Formalmente, un problema de optimización multiobjetivo con  $n$  variables,  $m$  objetivos y  $k$  restricciones (para el caso de minimización por ejemplo) puede ser definido como:

$$y = \min_{\bar{x}} (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})) \quad (2.1)$$

sujeto a:

$$e(\bar{x}) = (e_1(\bar{x}), e_2(\bar{x}), \dots, e_k(\bar{x})) \geq 0 \quad (2.2)$$

donde:

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X \text{ and } y = (y_1, \dots, y_m) \quad (2.3)$$



## Conceptos Básicos

Vilfredo Federico Damaso Pareto realizó importantes contribuciones al estudio de la economía y de la sociología, especialmente en el campo de la distribución de la riqueza y el análisis de las elecciones individuales. Fue el inventor del concepto “eficiencia de Pareto” contribuyendo al desarrollo de la microeconomía con ideas tales como la curva de indiferencia. En la actualidad se utilizan muchas de sus aportaciones en el campo de la optimización multiobjetivo.

El concepto **dominancia de Pareto** se utiliza frecuentemente para comparar dos soluciones y decidir si una domina a la otra o no:

*Definición 1 (Dominancia de Pareto):* En un problema de minimización, un vector  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_m)$  domina a  $\bar{v} = (v_1, \dots, v_m)$  (denotado como  $\bar{u} \preceq \bar{v}$ ) si y sólo si  $\bar{u}$  es parcialmente menor que  $\bar{v}$ :

$$\bar{u} \preceq \bar{v} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}, u_i \leq v_i \wedge \exists i \in \{1, \dots, m\} : u_i < v_i. \quad (2.4)$$

En otras palabras, un vector domina a otro cuando éste es menor o igual para todos los componentes y es estrictamente menor en, al menos, uno de ellos. Es importante destacar que si una solución  $\bar{x}$  no domina a otra solución  $\bar{y}$ , e  $\bar{y}$  no domina a  $\bar{x}$ , entonces ambos son no-dominados, y por lo tanto forman parte de las soluciones que se desean encontrar.

En los MOP con objetivos contradictorios no existe una solución única que pueda ser considerada la mejor, sino un conjunto de alternativas que representan los mejores compromisos entre todos los objetivos, en el sentido que cada solución es mejor que las otras en algún objetivo, pero ninguna es mejor que otra en todos los objetivos simultáneamente. Éste hecho implica que no es posible reducir un objetivo sin empeorar, al menos, uno de los demás. Por tanto, dicho conjunto es conocido como conjunto de soluciones “Óptimo de Pareto” [Coello et al., 2004], cuyos correspondientes vectores en el espacio de objetivos constituyen el denominado **Frente de Pareto** [Goldberg, 1989].

*Definición 2 (Óptimo de Pareto):* Una solución  $\bar{x}^* \in X$  se dice que es **Pareto-óptima** si y sólo si no existe otro vector  $\bar{x}$  tal que  $f(\bar{x}) =$

$(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$  domine a  $f(\bar{x}^*) = (f_1(\bar{x}^*), f_2(\bar{x}^*), \dots, f_m(\bar{x}^*))$ . Es decir,  $\bar{x}$  es Pareto-óptima si para cada  $\bar{x} \in X$  y  $I = \{1, \dots, m\}$  ocurre

$$\forall_{i \in I} (f_i(\bar{x}^*) = f_i(\bar{x})) \quad (2.5)$$

o al menos existe un  $i \in I$  tal que

$$f_i(\bar{x}) < f_i(\bar{x}^*) \quad (2.6)$$

### 2.1.3. Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo

La complejidad de los problemas de optimización multiobjetivo del mundo real ha desembocado en la búsqueda de diferentes técnicas alternativas para dar solución a este tipo de problemas, entre ellas se encuentra la computación evolutiva. [Rosenberg, 1967] fue el primero en proponer un método de búsqueda genético para resolver este tipo de problemas. Sin embargo, no fue hasta 1984 cuando D. Shaffer [Schaffer, 1984] propuso la primera implementación de lo que ahora es conocido como “Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo” o *Multiobjective Evolutionary Algorithm* (MOEA). Después de él varios investigadores han mostrado interés en este campo demostrando su eficacia frente a las técnicas clásicas de programación matemática (tales como la programación cuadrática). Los AE son adecuados para resolver MOP gracias a que trabajan simultáneamente con un conjunto de soluciones potenciales (población), de este modo son capaces de encontrar el frente óptimo de Pareto en una sola ejecución. Además, son menos sensibles a la forma o continuidad del frente de Pareto. En general, su principal característica es que son capaces de mantener un conjunto de soluciones (sometidas a un proceso de selección) y que son manipulados por operadores genéticos, generalmente el cruce y la mutación.

Todos los MOEAs propuestos a lo largo de los últimos años se pueden clasificar en tres grupos:

- **Funciones de agregación.** Implementan un método muy simple para manejar múltiples objetivos mediante la combinación de todos ellos en

uno solo utilizando, por ejemplo, sumas o multiplicaciones. Básicamente son algoritmos mono-objetivo cuya función de fitness codifica la relación entre varios objetivos. Estas funciones presentan diversas limitaciones pues existe gran dependencia por la función elegida. Es por ello que no han tenido gran éxito en el mundo de la investigación. Citar como ejemplos el trabajo de [Soleimani et al., 2009] o [Chiranjeevi and Sastry, 2007] que emplean este tipo de funciones para resolver, por ejemplo, el modelo de Markowitz referente a la selección de carteras de inversión.

- **Métodos poblacionales.** Son aquellos que, con el fin de introducir diversidad en la búsqueda, usan la población para explorar distintos tipos de soluciones. Sin embargo, su método de selección no implementa el concepto de “dominancia de Pareto”. El ejemplo más representativo es el algoritmo VEGA.
- **Métodos basados en jerarquización de Pareto:** Éstos son los métodos más comúnmente utilizados por los investigadores hoy en día. Su principal característica es su esquema de selección basado en el concepto de optimalidad de Pareto. Este tipo de procedimientos fue originado por [Goldberg, 1989], el cual afirmó que estos algoritmos serían incompetentes debido al ruido estocástico que poseen a no ser que se ideara un método que evitase la convergencia a una única solución. Para ello, Goldberg sugirió el método de nichos o el de compartición de aptitud. Existen dos generaciones de algoritmos basados en la jerarquización de Pareto. Respecto a la primera merece la pena citar NSGA [Srinivas and Deb, 1994], NPGA [Horn et al., 1994] o MOGA [Fonseca and Fleming, 1993]. Se considera una nueva generación de MOEAs a partir de la inclusión del concepto de “elitismo” para hacer referencia al uso de una población externa (denominada “archivo”) cuyo fin es preservar los individuos no-dominados que el algoritmo va encontrando. Otra forma de elitismo puede ser aquella en la que la selección es  $(\mu + \lambda)$ , es decir, hacer que los padres compitan con los hijos con el fin de escoger los no-dominados para la próxima generación. Algunos ejemplos de algoritmos pertenecientes a esta segunda generación pueden ser: SPEA, SPEA2,

PAES, NSGA-II, NPGA 2 o PESA.

A continuación se describen algunos de los algoritmos previamente mencionados, se ahondará más en aquellos MOEAs empleados en este trabajo:

### ***Vector Evaluated Genetic Algorithm: VEGA***

Desarrollado por [Schaffer, 1984, 1985]. Como se ha comentado, es un “método poblacional” considerado como el primer algoritmo multiobjetivo evolutivo. Su funcionamiento es como el de un algoritmo genético simple al que se le ha modificado el método de selección. En cada iteración se aplica una selección proporcional (en función de la función objetivo que esté evaluando) para generar varias subpoblaciones. Es decir, para una población de  $P$  individuos en un problema de  $k$  objetivos, se generarán  $k$  subpoblaciones con tamaño  $P/k$ . A continuación se mezclan todas ellas para formar un nuevo conjunto con  $P$  individuos sobre el cual son aplicados los operadores genéticos de cruce y mutación.

El mayor inconveniente de este método es que su esquema de selección es opuesto al concepto de dominancia de Pareto. Puede ocurrir que encuentre una buena solución compromiso para todos los objetivos pero que no sea la mejor en ninguno de ellos y, por lo tanto, ésta queda descartada. En cambio, dicho individuo debería ser preservado pues formaría parte del óptimo de Pareto.

### ***Pareto Archived Evolution Strategy: PAES***

Algoritmo implementado por [Knowles and Corne, 1999]. Es una estrategia evolutiva (1+1), es decir, en ella un único padre genera un único hijo sin utilizar operador de cruce (tan sólo aplica mutaciones). Seguramente sea el algoritmo multiobjetivo más simple de los que se han desarrollado. Para promover la diversidad en la población, PAES se ayuda de un archivo histórico en el que almacena algunas soluciones no-dominadas que va encontrando durante el proceso de evolución. Este archivo también es usado para decidir acerca del reemplazamiento de los individuos antiguos por los nuevos puesto

que cada individuo recién mutado es comparado con este conjunto. El método empleado para mantener la diversidad consiste en la división recursiva del espacio de objetivos, generando una malla de tal forma que cada individuo quede localizado en una celda de ésta. De este modo, PAES maneja la información de la malla de la que conoce el número de soluciones contenidas en cada casilla. Aparte del porcentaje de mutación, otro parámetro interesante a establecer es el número de divisiones de la malla.

### ***Pareto Envelope-based Selection Algorithm: PESA y PESA-II***

Desarrollado por [Corne et al., 2000]. Trabaja con una población interna y otra externa siendo la primera mucho menor que la segunda; además, en ésta última se irán almacenando las soluciones no-dominadas que se encuentren a lo largo del proceso evolutivo. PESA además utiliza el mismo método de división de malla que utiliza PAES empleando su métrica de densidad de población para seleccionar los individuos a introducir en la población externa. Por todas estas razones, dicha población externa juega un papel fundamental pues determina tanto la diversidad como la el proceso de selección.

Existe una segunda versión de este algoritmo conocida como PESA-II [Corne et al., 2001] cuyo principal objetivo es reducir el coste computacional. La diferencia con la primera versión es que implementa un método de selección distinto basado en regiones. Dicho proceso consiste en seleccionar un hipercubo (en lugar de un individuo) para escoger aleatoriamente cualquier individuo que le pertenezca.

### ***Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II: NSGA-II***

Este algoritmo, propuesto por [Deb et al., 2002], es uno de los más conocidos en la actualidad. Se corresponde con la segunda versión de NSGA [Srinivas and Deb, 1994] aunque, en realidad, existe poca similitud entre ellos.

NSGA-II, al igual que otros MOEAs, crea la población de hijos a partir de la población de padres (ambas con el mismo tamaño). A diferencia de otros algoritmos que sólo extraen el frente no-dominado de los predecesores, combina ambas poblaciones para formar un conjunto mixto con el doble de

individuos que la población original. Asimismo, NSGA-II también se diferencia de los demás métodos en que, además de utilizar elitismo, emplea una técnica que ayuda a mantener la diversidad de las soluciones en el frente (distancia de *crowding*).

---

**Algorithm 2** Pseudocódigo de NSGA-II
 

---

- 1: **ENTRADA:**  $N$  tamaño de población,  $P_c$  probabilidad cruce,  $P_m$  probabilidad mutación, etc.
  - 2: Generar una población inicial con  $P_0$  con  $N$  individuos.
  - 3: Asignar  $t = 0$ , donde  $t$  es el número de generaciones.
  - 4: **while**  $t < T$  (no se alcance el número máximo de generaciones) **do**
  - 5:   Asignación de fitness: Calcular el valor de fitness de los individuos en  $P_t$ . (Usar el criterio de no-dominancia para  $t = 1$  y distancia de crowding para el resto).
  - 6:   Aplicar operadores genéticos a  $P_t$  (*Binary tournament selection* + *SBX crossover* + *Polynomial mutation*) para obtener  $H$ .
  - 7:   Combinar  $P_t$  y  $H$  para conseguir  $P_{(t+1)}$  según el alg. 3.
  - 8:    $t = t + 1$
  - 9: **end while**
  - 10: **RETORNO:** Población no-dominada  $P_T$ .
- 

El algoritmo 2 muestra su esquema principal de funcionamiento. Al comenzar se genera aleatoriamente una población inicial  $P_0$  de tamaño  $N$  (paso 2) que se ordena en diferentes niveles de no-dominancia. A cada individuo se le asigna un valor de fitness el cual se corresponde con su nivel de dominancia (paso 5), siendo 1 el mejor nivel que es asignado a las soluciones no-dominadas por ningún otro individuo del frente. A continuación se crea la población de hijos  $H$  aplicando operadores genéticos en  $P_t$ , concretamente se emplea una selección binaria por torneos más un cruce SBX y una mutación polinomial.

---

**Algorithm 3** Procedimiento de Elitismo
 

---

- 1: Combinar  $P_t$  y  $H$ :  $R = P_t \cup H$
  - 2: Ordenar  $R$  considerando dominancia y obtener frentes por niveles de dominancia  $R_f$ .
  - 3:  $f = 1$
  - 4: **while**  $P_{(t+1)} < N$  **do**
  - 5:   Asignar y ordenar por distancia de densidad de población (*crowding*) a  $R_f$
  - 6:    $P_{(t+1)} = P_{(t+1)} \cup R_f$
  - 7:    $f = f + 1$
  - 8: **end while**
- 

A partir de la segunda generación, dicho procedimiento varía usándose el método de elitismo descrito en el algoritmo 3. En él,  $H$  y  $P_t$  se combinan en

$R$  (paso 1) que se ordena por niveles  $R_f$  conforme a la no-dominancia de sus elementos (paso 2). Una vez finalizado dicho ordenamiento, la población de la siguiente generación se llena (pasos 3-7) comenzando por el mejor frente no-dominado (aquel de nivel 1), continuando con los individuos del segundo frente no-dominado y así sucesivamente hasta que  $P_{t+1}$  alcance el tamaño  $N$ . La figura 2.2 muestra un esquema de dicho proceso. Como  $R$  contiene  $2N$  soluciones, no todos los frentes  $R_f$  son incluidos en  $P_{t+1}$  de modo que, al llegar al último frente permitido, es muy posible que éste contenga más soluciones que las necesarias para acabar el llenado del frente global. En este caso, en lugar de descartar aleatoriamente los miembros sobrantes, NSGA2 emplea una estrategia de nichos para escoger aquellos individuos que residan en las regiones menos pobladas de dicho frente. Para ello, utiliza una medida de densidad de población (o *crowding*) que obtiene una estimación de la densidad de las soluciones que rodean a un individuo tomando, en particular, la distancia promedio de dos soluciones en ambos lados de dicho individuo a lo largo de cada objetivo. Esta técnica ayuda a preservar la diversidad del frente de Pareto.

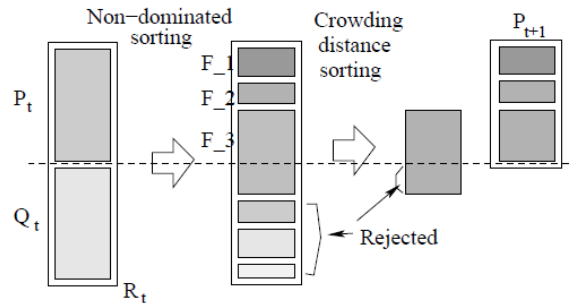


Figura 2.2: Esquema de ordenamiento de NSGA2 [Deb et al., 2002]

### ***Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2: SPEA2***

SPEA2 [Zitzler et al., 2001] se corresponde con la segunda versión del conocido algoritmo SPEA, introducido por [Zitzler and Thiele, 1998]. Este método usaba un archivo donde guardar los individuos no-dominados que

iban encontrándose en cada generación. Además, a cada solución del archivo se le daba un valor que era calculado de forma proporcional al número de individuos que dominaba. SPEA empleaba el “método de vinculación de promedio” como técnica de agrupamiento con el fin de generar frentes diversos.

SPEA2 trata de solucionar las debilidades de su predecesor. Las principales diferencias con respecto a SPEA son:

1. Usa un nuevo esquema que mejora la asignación de fitness. Esto tiene en cuenta, para cada solución, el número de individuos a los que domina y de los cuales es dominado.
2. Emplea la técnica de estimación de densidad de “grano fino” del vecino más cercano, la cual guía de forma más precisa la búsqueda.
3. Tiene una función mejorada de truncamiento del archivo externo que preserva los individuos situados en la frontera del frente.

El algoritmo 4 muestra el esquema principal de su funcionamiento. Cada individuo tiene asignado un fitness que es la suma de su *strength raw fitness* y una estimación de densidad. SPEA2 aplica operadores genéticos para rellenar un archivo de soluciones (selección medioambiental, cruce SBX y mutación polinomial). Los individuos no-dominados tanto de la población original como del archivo se copian en una nueva población. Si el número de éstos supera el tamaño máximo de la población, se emplea un operador de truncamiento basado en el cálculo de la distancia al ‘*k-ésimo* vecino más cercano’ [Silverman, 1986].

En el paso 3 del algoritmo, con el fin de evitar que los individuos dominados por los mismos miembros del archivo tengan el mismo valor de fitness, se tienen en cuenta tanto las soluciones dominantes como las dominadas según se muestra en la figura 2.3. De este modo, el *raw fitness* de un individuo es calculado usando las fuerzas de las soluciones que lo dominan tanto del archivo como de la población. SPEA, en cambio, tan sólo consideraba los miembros del archivo para realizar este cálculo). Sin embargo, y aunque el mecanismo de asignación de fitness esté basado en el concepto de dominancia de Pareto, éste puede fallar cuando la mayoría de las soluciones no se



**Algorithm 4** Pseudocódigo de SPEA2

---

- 1: **ENTRADA:**  $N$  tamaño de población,  $\bar{N}$  tamaño del archivo,  $T$  número máximo de generaciones,  $P_c$  probabilidad cruce,  $P_m$  probabilidad mutación, etc.
  - 2: **Inicialización:** Generar la población inicial  $P_0$  y el archivo externo vacío:  $\bar{P}_0 = \emptyset$ . Poner  $t = 0$ .
  - 3: **Asignación de fitness:** Calcular el fitness de los individuos en  $P_t$  y  $\bar{P}_t$ .
  - 4: **Selección Ambiental:** Copiar todos los individuos no-dominados de  $P_t$  y  $\bar{P}_t$  a  $\bar{P}_{t+1}$ .
  - 5: **if**  $|\bar{P}_{t+1}| > \bar{N}$  **then**
  - 6:   Reducir  $\bar{P}_{t+1}$  mediante el operador de truncamiento.
  - 7: **else if**  $|\bar{P}_{t+1}| < \bar{N}$  **then**
  - 8:   Rellenar  $\bar{P}_{t+1}$  con individuos dominados de  $P_t$  y  $\bar{P}_t$ .
  - 9: **end if**
  - 10: **Terminación:** Si  $t < T$  o se cumple algún otro criterio de parada, guardar en  $A$  las soluciones no-dominadas de  $\bar{P}_{t+1}$ . Parar.
  - 11: **Selección para la reproducción:** Llevar a cabo una *Binary tournament selection* en  $P_{t+1}$  para generar el conjunto a reproducir.
  - 12: **Variación:** Aplicar operadores genéticos a  $P_{t+1}$  (*SBX crossover* + *Polynomial mutation*) y establecer el conjunto obtenido como  $P_{t+1}$ . Incrementar  $t = t + 1$ . Ir al paso 3.
  - 13: **RETORNO:** Archivo  $A$ .
- 

dominen entre ellas. Por lo tanto, SPEA2 incorpora determinada información sobre la densidad de los frentes con el fin de discriminar individuos que tengan el mismo valor de fitness. Esta técnica es una adaptación del método del “*k-ésimo* vecino más cercano” donde la densidad en cualquier punto representa una función decreciente de la distancia de ese punto a su *k-ésimo* vecino más próximo. Se escoge como estimación de densidad su distancia inversa a dicho vecino. Es decir, para cada individuo  $i$  se calculan todas las distancias en el espacio de objetivos hacia todos los individuos del archivo y y de la población y se almacenan en una lista. Una vez ordenada dicha lista de forma creciente, el elemento *k-ésimo* determina la distancia buscada.

El archivo que utiliza SPEA2, a diferencia de SPEA, es de tamaño fijo. Cuando el número de individuos no-dominados sea menor que el tamaño del archivo, éste es rellenado por soluciones dominadas. La técnica de *clustering* de SPEA (ejecutada cuando el número de soluciones no-dominadas excedía del tamaño límite del archivo) se reemplaza por un método alternativo de truncamiento (pasos 4-9) con características similares, pero que no pierde individuos situados en los límites del frente. Además, a diferencia de SPEA, tan sólo los miembros del archivo participan en la selección de individuos

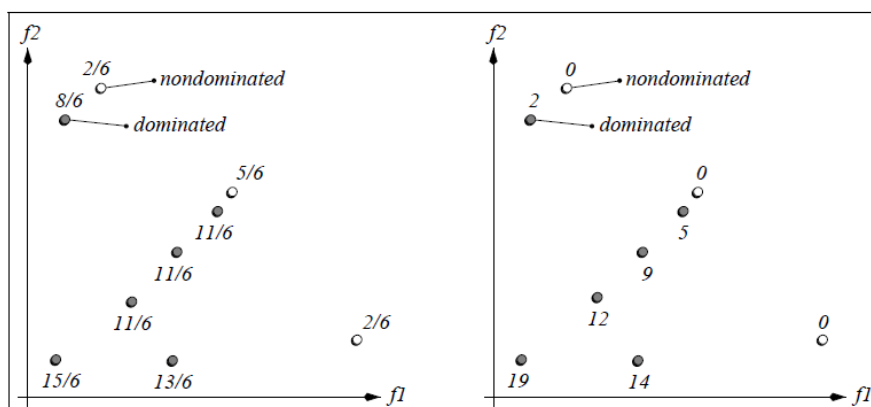


Figura 2.3: Comparación de asignación de fitness en SPEA y SPEA2 para un problema de maximización bi-objetivo. En la izquierda se muestra el método de SPEA y en la derecha el método de SPEA2, ambos sobre la misma población [Zitzler et al., 2001]

para la reproducción (paso 11).

### ***Speed-constrained Multi-objective PSO: SMPSO***

El algoritmo de “Optimización Mediante Enjambres de Partículas” o *Particle Swarm Optimization* (PSO) [Kennedy and Eberhart, 1995] es una metaheurística mono-objetivo inspirada en la biología que ha adquirido gran fama en la investigación como método de resolución de problemas de optimización multiobjetivo. [Moore and Chapman, 1999] fueron los primeros investigadores que extendieron PSO a la optimización multiobjetivo y, desde entonces, más de una treintena de versiones diferentes de *Multi-Objective Optimization PSOs* (MOPSOs) han surgido en la literatura [Reyes-sierra and Coello, 2006].

Los algoritmos de enjambres de partículas están inspirados en el comportamiento social de ciertas especies animales, concretamente en los movimientos de bandadas de pájaros o de bancos de peces. En ellos, cada individuo o partícula se mueve siguiendo unas sencillas reglas que ajustan su velocidad en función de las acciones del resto de individuos del grupo. En general, el objetivo de PSO es el de encontrar un óptimo global para una función de fit-

ness dada mediante el movimiento de una población de individuos (también conocido como enjambre de partículas) en un espacio definido por el número de parámetros de dicha función.

En concreto, cada partícula está formada por un vector  $\bar{x}_i$  que indica su posición, otro  $\bar{v}_i$  que indica su velocidad y un último  $\bar{x}_{pi}$  que almacena la mejor posición de la partícula encontrada hasta el momento.  $\bar{x}_i$  codifica un conjunto de parámetros que representan una solución ( $i$  se refiere al número de partícula dentro del enjambre). A la hora de elegir su movimiento, los individuos emplean tanto información histórica (anteriores resultados) como conocimiento sobre sus partículas vecinas del enjambre.

**SMPSO**, introducido por [Nebro et al., 2009], es un PSO multiobjetivo basado en el algoritmo conocido como OMOPSO [Reyes and Coello, 2005]. En el PSO mono-objetivo, el líder que emplea cada partícula para actualizar su posición se determina una vez se fija la topología del vecindario. Sin embargo, a la hora de adaptar el algoritmo mono-objetivo a una visión multiobjetivo, se establece que cada individuo tenga un conjunto de distintos líderes a partir de los cuales se elija uno sólo que sirva para la actualización de su posición. Dicho conjunto se guarda en un repositorio aparte llamado archivo externo; éste contiene partículas que son no-dominadas y se emplean como líderes en la actualización de posiciones. Además, el contenido de este archivo externo es el que generalmente se devuelve como solución al final de la ejecución del algoritmo.

SMPSO se diferencia de OMOPSO en que incluye un procedimiento de restricción de velocidad. Este mecanismo resulta muy útil cuando la velocidad es muy grande porque ayuda a generar partículas con posiciones efectivas ya que, en lugar de usar parámetros que establezcan un límite inferior y superior para el tamaño de la velocidad, se utiliza el coeficiente de constricción desarrollado por [Clerc and Kennedy, 2002]. Además SMPSO utiliza una mutación de tipo polinomial [Deb, 2001] como factor de turbulencia.

El algoritmo 5 muestra el esquema principal de funcionamiento de SMPSO. Comienza inicializando el enjambre (pasos 2-5) de partículas incluyendo su posición, velocidad y su mejor individuo  $p$ . Posteriormente se rellena el archivo con las soluciones no-dominadas del enjambre (paso 6). A conti-

**Algorithm 5** Pseudocódigo de SMPSO

---

```

1: ENTRADA:  $T$  Número máximo de generaciones,  $P_m$  Probabilidad de mutación.
2: Inicializar aleatoriamente el enjambre de partículas  $P$ .
3: Evaluar todas las partículas  $\bar{x}_i^0 \in P$ .
4: Inicializar la velocidad de todas las partículas de  $P$ :  $v_i^0 = \emptyset$ 
5: Inicializar el vector de mejores partículas  $\bar{x}_p^0$ .
6: Inicializar el archivo de partículas líder  $A$  con las partículas no-dominadas de  $P$ .
7: while  $t < T$  do
8:   Calcular la nueva velocidad  $\bar{v}_i^t$  de las partículas.
9:   Actualizar posición  $\bar{x}_i^t$  de las partículas.
10:  Aplicar mutación polinomial a todo  $\bar{x}_i^t \in P$ .
11:  Evaluar las partículas  $\bar{x}_i^t \in P$ .
12:  Actualizar el archivo de líderes  $A$ .
13:  Actualizar el vector de mejores partículas  $\bar{x}_p^t$ .
14:   $t = t + 1$ 
15: end while
16: RETORNO:(Archivo de partículas líder:  $A$ )

```

---

nuación se entra en el bucle principal del algoritmo (pasos 7-15), el cual se ejecuta un máximo de  $T$  iteraciones. Dentro de él, se calculan primeramente las velocidades y posiciones de las partículas aplicándoles después el operador de mutación polinomial (pasos 8-10). Después, se evalúan los individuos resultantes (paso 11) y se actualizan tanto la memoria de las partículas como el archivo de líderes (pasos 12-13). Durante este proceso es probable que el archivo de partículas líder se llene. Si se da el caso, SMPSO aplica la distancia de crowding propia de NSGA-II para decidir qué partículas deben ser desechadas. Para elegir el conjunto de mejores partículas  $\bar{x}_p$ , el algoritmo toma aleatoriamente dos individuos del archivo de líderes y escoge aquel que tenga mayor distancia de crowding respecto a sus vecinos más próximos.

**Generalized Differential Evolution 3: GDE3**

GDE3 [Kukkonen and Lampinen, 2005] es la tercera versión del algoritmo de “Evolución Generalizada Diferencial” o *Generalized Differential Evolution* (GDE). Extiende el básico *Differential Evolution* (DE) (*DE/rand/1/bin*) con el fin de resolver problemas con varios objetivos y restricciones. Además, también es capaz de operar con problemas que sólo poseen objetivos (sin restricciones) o viceversa.

El algoritmo 6 muestra su esquema de funcionamiento principal cuyo

**Algorithm 6** Pseudocódigo de GDE3

---

**ENTRADA:**  $P_c$  Probabilidad de cruce,  $N$  Tamaño de población,  $T$  Número máximo de generaciones,  
 Generar aleatoriamente la población  $P$   
**while**  $t < T$  **do**  
   **for** every  $\bar{x}_i \in P$  **do**  
 Seleccionar aleatoriamente  $\bar{x}_{r1}$ ,  $\bar{x}_{r2}$  y  $\bar{x}_{r3}$  de  $P$  tal que  $\bar{x}_{r1} \neq \bar{x}_{r2} \neq \bar{x}_{r3} \neq \bar{x}_i$ .  
 Calcular el vector de ensayo:  $\bar{y}_i = \bar{x}_{r3} + F * (\bar{x}_{r1} - \bar{x}_{r2})$  donde  $F$  es un factor de escala.  
 Modificar  $\bar{y}_i$  por Binary Crossover con una probabilidad  $P_c$ .  
 Aplicar el operador de selección:  
**if**  $\bar{x}_i$  domina a  $\bar{y}_i$  **then**  
   Seleccionar  $\bar{x}_i$ .  
**else if**  $\bar{y}_i$  domina a  $\bar{x}_i$  **then**  
   Seleccionar  $\bar{y}_i$   
**else**  
   Seleccionar ambos  $\bar{y}_i$  y  $\bar{x}_i$ . La población es reducida después por ordenamiento y clasificación de individuos no-dominados y comparación por distancia de crowding.  
**end if**  
**end for**  
 $t = t + 1$   
**end while**  
**RETORNO:**(Población  $P$ )

---

operador de selección está basado en los siguiente principios:

1. Si ningún vector es factible, será seleccionado aquel que sea dominante en el espacio de restricciones.
2. Para el caso en el que haya un vector factible y otro no, se escogerá el primero.
3. Si ambos vectores son factibles, se elegirá el vector que domine al otro. En el caso en el que ninguno sea dominado, ambos vectores serán seleccionados para pasar a la próxima generación.

Después de cada generación, el número de vectores de la población puede haberse visto incrementado. Si éste fuera el caso, GDE3 merma dicha población hasta su tamaño original aplicando métodos similares a la selección utilizada por NSGA-II: los individuos se ordenan en base al factor de dominancia y a la distancia de crowding y, a continuación, los peores vectores

se eliminan para que la población vuelva a su tamaño original. Además, este algoritmo utiliza otros conceptos pioneros empleados por NSGA-II, tales como:

- La comparación entre individuos se realiza en base a la relación de dominancia en el espacio de objetivos o en el de restricciones.
- Clasificación en distintos rangos o niveles de la población no-dominada de tal modo que los individuos del nivel  $n$  dominen a aquellos del nivel  $n + 1$ . El rango  $n = 1$  está constituido por el grupo de individuos no-dominados de la población que representan el conjunto más cercano a la frontera eficiente.
- La distancia de crowding es empleada como segundo factor discriminatorio de selección sobre los miembros de un mismo rango. Aquellos individuos que se encuentren en regiones muy pobladas recibirán una baja puntuación eligiéndose, por lo tanto, aquellos que sean muy diversos. De esta manera, se previene la prematura convergencia hacia una región pequeña de la frontera eficiente.

En cambio, GDE3 ha adaptado el ordenamiento no-dominado propio del NSGA-II para que sea capaz de incluir restricciones. De igual modo, ha mejorado la selección por distancia de crowding sobre la versión original contenida en NSGA-II.

Una particularidad de GDE3 es que es posible ejecutarlo definiendo un único objetivo y ninguna constante. En este caso, el algoritmo no necesitaría aplicar métodos de reducción de población pues tanto el vector de ensayo como el antiguo, al poseer un sólo objetivo, nunca se dominarían mutuamente. Por lo tanto, al no ser necesario aplicar ningún método de reducción, GDE3 se vería simplificado al básico DE mono-objetivo.

## 2.2. Teoría de Carteras

A día de hoy existe una amplia gama de alternativas respecto a instrumentos de inversión. Debido a que éstos, a su vez, presentan diversas carac-

terísticas, el inversor se ve inmerso en un gran conjunto de oportunidades. Muy a menudo se presentan buenas ocasiones de inversión en más de un activo financiero y, sin embargo, el hecho de no poder contar con fondos ilimitados impide aprovecharse de todas ellas. Por esta razón el inversor, que posee una cantidad fija de dinero, va a desear repartirlo entre sólo algunos activos, aquellos que le benefician más. En la actualidad, estos inversores (ya sean individuos o instituciones) deben optar por elegir entre determinar el destino de sus inversiones por ellos mismos o hacerlo a través de una tercera persona conocida como “gestor de carteras” o “*portfolio manager*”.

### 2.2.1. Construcción de una cartera de inversión

Se define “cartera de inversión” (o *portfolio investment* en su equivalente anglosajón) como el conjunto de activos financieros en que se divide el total de la inversión de una persona o empresa.

La construcción de una cartera de inversión ([Reilly and Brown, 1997]) equivale a realizar la selección adecuada de los instrumentos de inversión que la integrarán, así como también determinar la proporción de dicha inversión que se destinará a cada uno de estos instrumentos.

La gráfica 2.4 muestra una cartera de inversión formada por los activos  $\{A, B, \dots, F\}$  y la proporción de la inversión (en %) destinada a dicho valor.

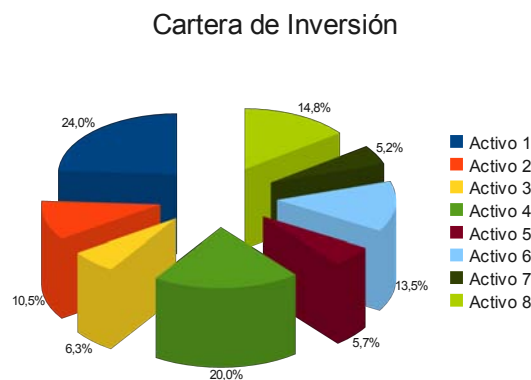


Figura 2.4: Ejemplo de una cartera de inversión

Se cuentan con ciertos principios básicos que ayudan a realizar la selección de instrumentos financieros con el propósito de obtener una cartera eficiente. El procedimiento de escoger entre la gran diversidad de instrumentos de inversión existentes y determinar qué proporción de dicha inversión destinar a cada uno los elegidos con el fin de obtener los mayores beneficios posibles no es en absoluto sencillo. Afortunadamente, existen distintos métodos que ayudan a tomar este tipo de decisiones y que ofrecen como resultado una selección adecuada de instrumentos de inversión.

### 2.2.2. Teoría Moderna de Carteras

Entre las técnicas empleadas para el análisis de carteras se encuentra “**La Teoría Moderna de Carteras**” o “Teoría de Media-Varianza” (*Modern Portfolio Theory*), la cual fue propuesta por el profesor en finanzas Harry M. Markowitz [Markowitz, 1952]. A partir de la publicación de este modelo, el problema del diseño y selección de carteras [Markowitz, 1959] se ha convertido en uno de los campos más activos de investigación en finanzas. Son muchos los trabajos de investigación ([Coello and Lamont, 2004b, Santamaria, 2000, Ibeth, 2008] etc.) y aplicaciones que se han llevado a cabo partiendo de esta teoría como base.

El profesor Markowitz inició una revolución al sugerir que la mejor manera de evaluar un activo es mediante el cálculo de la media y desviación típica de sus rendimientos, así como su correlación con respecto a otros activos de la cartera. Explica que el inversor, en su empeño por elegir aquellas acciones que sean más prometedoras, va a invertir en distintos activos cuyos comportamientos son inciertos. Por esta razón, propone abordar la cartera como un único elemento del cual deben estudiarse las características de riesgo y de rendimiento global en lugar de tratarse por separado, es decir, con sus valores individuales en función de cada activo en particular.

Esta audaz sugerencia apuesta por ignorar gran cantidad de información de la empresa (sus ingresos, política de dividendos, estructura de capital, mercado, competidores, etc.) simplificando significativamente los cálculos estadísticos. Además, este modelo supone que existe un inversor, individual o



institucional, el cual posee una determinada suma de dinero que desea invertir por un período determinado (*holding period*). Al terminar este período el inversor vende su tenencia para luego consumir y/o reinvertir nuevamente. De igual modo, establece otros supuestos tales como:

- La inversión siempre es total.
- Todos los activos son líquidos e infinitamente divisibles.
- Todos los inversores poseen la misma información.
- Las decisiones de compra y venta de valores no afectan el mercado.
- No hay costes de transacción ni impuestos.
- Todos los inversores basan sus decisiones únicamente en los rendimientos esperados y el riesgo; es decir, solamente en sus funciones de media y varianza (o desviación típica) de los rendimientos.
- Los inversores también presentan aversión al riesgo, esto significa que para un dado nivel de rendimiento esperado, los inversores prefieren el menor riesgo posible. Y del mismo modo, ante un nivel de riesgo dado, éstos se decantan por un mayor rendimiento en lugar de menor.

Si se pretenden comparar diferentes inversiones en varios activos financieros, es muy aconsejable calcular de la forma más aproximada posible el rendimiento de cada uno de ellos. En un ambiente de certeza, el rendimiento que se espera obtener para cada activo coincidirá con el que realmente se obtiene y, en consecuencia, el activo con la mayor ganancia obtenida será el elegido. Por desgracia, la existencia de la incertidumbre en los mercados hace que el rendimiento de una inversión raramente coincida con su valor esperado. De este modo, todos los activos financieros cotizados en el mercado de valores dependen de un riesgo que, como es lógico, será diferente para cada tipo de activo. Por lo tanto, es necesario que el inversor pueda cuantificar tanto el rendimiento incierto como el nivel de dicha incertidumbre para cada activo antes de tomar una decisión.

En el modelo de Markowitz, el precio de mercado de los activos representa una variable aleatoria cuyos rendimientos se caracterizan por su media y su varianza. El objetivo principal es maximizar el rendimiento de una cartera minimizando su riesgo asociado. Estos dos objetivos son contrapuestos y, como norma general, el inversor diversificará adquiriendo varios activos financieros. Esta diversificación es su mejor arma contra el riesgo. A continuación se describen ambos factores:

### Rendimiento de una cartera

El rendimiento esperado de una cartera de activos se calcula con la media ponderada de las rentabilidades esperadas para los activos individuales de la cartera. El rendimiento individual de cada activo  $\mu_i$  se puede definir de la siguiente manera:

$$\mu_i = \Sigma_{t=1}^T (R_{it} - R_{i(t-1)}) \quad (2.7)$$

donde  $T$  es el número de períodos de tiempo que contiene el historial de inversiones,  $R_{it}$  indica el precio del activo financiero  $i$  al final del período  $t$  y  $R_{i(t-1)}$  es el precio del activo  $i$  al comienzo del período  $t$ .

Por lo tanto, se define rendimiento esperado o rentabilidad de una cartera  $E(R_p)$  como la suma de las rentabilidades multiplicadas por el peso específico que cada activo contenido en la cartera tal y como se expresa en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} E(R_p) &= w_1 * \mu_1 + w_2 * \mu_2 + w_3 * \mu_3 + \dots + w_n * \mu_n \\ E(R_p) &= \Sigma_{i=1}^n w_i \mu_i \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $n$  es el número de activos que forman la cartera,  $w_i$  el porcentaje de ésta (en tanto por uno) invertido en cada acción  $i$  y  $\mu_i$  es el rendimiento esperado del activo  $i$ .

## Riesgo de una cartera

El riesgo se calcula estudiando la variabilidad en la tasa de los rendimientos que son obtenidos de la inversión, la cual puede ser medida por la varianza o la desviación típica (su raíz cuadrada). Esto significa que el riesgo o volatilidad de un activo financiero se mide por la dispersión de sus rendimientos. Una distribución con rendimientos sumamente volátiles de un período indica un alto grado de incertidumbre (o riesgo) acerca del rendimiento posible de la inversión. Por tanto, cuanto mayor sea la varianza o desviación estándar de la distribución de probabilidades de los posibles rendimientos de una inversión, menos atractiva resultará la cartera.

De este modo, el riesgo o varianza  $\sigma_p^2$  se calcula como:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + \dots + w_n^2\sigma_n^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + \dots + 2w_{n-1}w_n\sigma_{(n-1)n} \\ \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}\end{aligned}\quad (2.9)$$

donde  $n$  es el número de activos que forman la cartera,  $w_i$  el porcentaje de ésta (en tanto por uno) invertido en cada acción  $i$ ,  $\sigma_i$  la desviación típica del rendimiento del activo  $i$  y  $\sigma_{ij}$  es la covarianza del rendimiento del activo  $i$  con el del rendimiento del activo  $j$ .

Como se puede ver, el riesgo de una cartera no sólo depende de las varianzas de los instrumentos financieros individuales, sino también de la covarianza de los rendimientos posibles entre cada par de instrumentos financieros. La covarianza indica cuál será el comportamiento de un activo al producirse una variación en el valor de otro activo. Para el caso en concreto de este modelo, se puede definir de la siguiente forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^T (R_{it} - \mu_i)(R_{jt} - \mu_j)}{n - 1} \quad (2.10)$$

donde  $T$  es el número de períodos de tiempo considerado,  $R_{it}$  indica el precio del activo financiero  $i$  al final del período  $t$  y  $R_{jt}$  es el precio del activo  $j$  en  $t$ .

La covarianza mide estadísticamente la relación entre dos variables aleatorias cualesquiera, es decir, mide de qué manera dos variables aleatorias,

tales como los rendimientos de dos activos, se mueven conjuntamente. Por lo tanto, si su valor es:

- Positivo, los rendimientos de ambos activos tienden a moverse en el mismo sentido. Es decir, cuando una acción sube, la otra también tiende a hacerlo.
- Negativo, los activos se mueven en sentidos opuestos. Cuando uno sube, el otro tiende a bajar.
- Próximo a cero, es probable que ambos activos no estén relacionados.

Al igual que para el caso del rendimiento existe un vector de rendimientos esperados, en el caso del riesgo de una cartera se puede hablar de una matriz de covarianzas como la siguiente:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \dots & \sigma_{2,n} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_3^2 & \dots & \sigma_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

dicha matriz tiene estructura simétrica y recoge en su diagonal principal las varianzas de los rendimientos.

### Frontera eficiente

A partir de lo anterior, se puede decir que el objetivo del modelo de Markowitz queda definido formalmente como:

- Minimizar del **riesgo** (varianza) de la cartera:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (2.11)$$

- Maximizando su **rendimiento**:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \quad (2.12)$$

- Sujeto a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ 0 \leq w_i &\leq 1; i = 1 \dots n \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde  $n$  es el número de activos de la cartera de inversión,  $w_i$  son las variables de decisión que componen la cartera,  $\mu_i$  es el rendimiento esperado del activo  $i$  y  $\sigma_{ij}$  es la covarianza entre el activo  $i$  y  $j$ . Las ecuaciones referenciadas en 2.13 requieren inversión completa.

Mediante las fórmulas anteriores, variando los pesos  $w_i$  de los activos, podemos calcular infinito número de carteras ya que existen infinitas variaciones de pesos. Si éstas se colocan en un gráfico (ver figura 2.5) donde el eje horizontal es el riesgo (desviación típica) de la cartera y el eje vertical su rendimiento, se obtiene una nube de puntos en la que hay carteras con mejor relación de riesgo/rendimiento que otras, o dicho de otra manera, hay carteras que dominan a otras. Estas carteras dominantes que garantizan el menor riesgo posible para un rendimiento dado y viceversa, definen la curva conocida como "frontera eficiente". La mayor o menor concavidad de dicha curva dependerá de la correlación que exista entre los distintos activos.

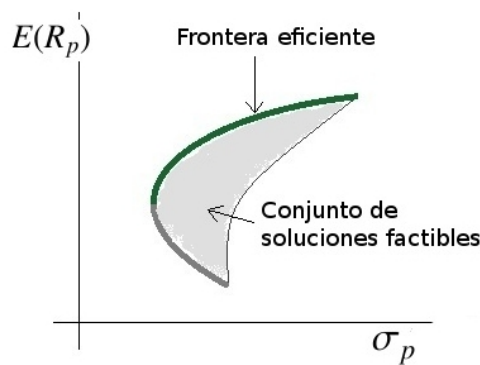


Figura 2.5: Frontera Eficiente

### Limitaciones del modelo

La teoría de Markowitz representa un modelo simplificado de la realidad que opera bajo una serie de supuestos:

- La rentabilidad de cualquier activo, es una variable aleatoria con una distribución normal de probabilidad para el periodo de referencia. La media o esperanza matemática de dicha variable aleatoria se acepta como medida de la rentabilidad de la inversión.
- Para calcular el riesgo se emplea la dispersión, la cual se mide con la varianza o desviación estándar de la variable aleatoria que describe la rentabilidad, ya sea de un valor individual o de una cartera.
- El inversor siempre prefiere aquellas carteras con una mayor rentabilidad y un menor riesgo.
- Los inversores invierten en una cartera eficiente, es decir, que no hay otra cartera que ofrezca un mayor rendimiento con igual o menor riesgo, o bien, menor riesgo con igual o mayor rendimiento esperado.

En cambio, el mundo real financiero requiere determinadas exigencias y limitaciones que surgen a partir de los inversores y sus negocios de mercado, las transacciones, la regulación de la industria, etc. Estos factores, que el modelo de Markowitz no contempla, se convierten en restricciones de carácter realista que deben ser tenidas en cuenta por los gestores de cartera. Existen diversos trabajos tales como [Anagnostopoulos and Mamanis, 2011, Skolpadungket et al., 2007, Streichert et al., 2003] o [Barbosa and Lemonge, 2005] que analizan y trabajan con dichas restricciones para resolver el problema de la optimización de carteras. Entre las principales se pueden enumerar:

- Establecer la cardinalidad de la cartera, es decir, limitar el número de productos distintos que pueden incluirse en la cartera de inversión de modo que sea posible establecer un máximo  $C_{max}$  y mínimo  $C_{min}$  número de activos a invertir ( $w_i \neq 0$ ). Conviene establecer la cardinalidad de una cartera por razones de supervisión o diversificación, o razones

de control de coste de transacción. Formalmente se puede expresar de la siguiente manera:

$$C_{min} \leq \Sigma_1^n(w_i \neq 0) \leq C_{max} \quad (2.14)$$

- Definir umbrales mínimos y máximos para la inversión en un activo determinado: fijar los límites inferiores  $lim_{inf}$  y superiores  $lim_{sup}$  de la proporción  $w_i$  de cada activo que se puede tener en una cartera. Estas restricciones pueden ser producto de la política institucional de diversificación de la cartera o servir para descartar inversiones de una entidad tan pequeñas que los costes de gestión superen a los beneficios potenciales. Formalmente se puede expresar:

$$lim_{inf} \leq w_i \leq lim_{sup} \quad (2.15)$$

- Restricción de *round-lot* que fuerza a que los porcentajes de inversión por activo  $w_i$  equivalgan a acciones divisibles por el tamaño del lote  $f_i$ :

$$w_i = y_i * f_i; y_i \in \mathbb{Z} \quad (2.16)$$

Además, existen otras restricciones como, por ejemplo, las derivadas de un sector/industria, de los impuestos, de volumen de ventas, costes de transacciones y compra de inversiones, límites a las variables (generalmente mínimo) para controlar cada transacción, restricciones de capitalización del mercado o de un sector (la cual mide la tendencia del inversor a invertir en sectores con mayor valor de capitalización con el fin reducir el riesgo de inversión) [Soleimani et al., 2009], etc.

## 2.3. Técnicas para la Optimización de Carteras

El problema de optimización de carteras ha sido abordado a lo largo del tiempo por diversas técnicas que, en su mayoría, están basadas en el conocido modelo de Markowitz (sec. 2.2.2). Generalmente este problema de

optimización no es sencillo de resolver, pues su complejidad aumenta con el número de restricciones y de activos a incluir en la cartera.

La versión básica del modelo de Markowitz se puede resolver mediante el método tradicional de “Programación Cuadrática” (QP en adelante), el cual ya ha sido empleado por diversos autores en el pasado. Véase por ejemplo el trabajo de [Wolfe, 1957], que proporciona una estrategia de cálculo para encontrar el mínimo de una función cuadrática cuyas variables están condicionadas por restricciones lineales de desigualdad; dicha técnica emplea una adaptación al Método Simplex para programación lineal basándose en el procedimiento Barankin-Dorfman. Existe otra alternativa, el “método de Lagrange”, la cual se puede utilizar si se relaja el supuesto básico de Markowitz para que no haya ventas en descubierto, es decir, no exigiendo que las soluciones sean positivas (hecho que implica la posibilidad de venta de activos a corto plazo). Por desgracia, el método de Lagrange se muestra incapaz de solucionar el problema cuando se presenta esta restricción mencionada.

A pesar de que el uso de la QP parece adecuado para la resolución del modelo de Markowitz, ocurre que en muchas ocasiones se desean tener en cuenta otro tipo de restricciones que surgen a partir del uso del modelo mencionado en el mundo real financiero (ver sección 2.2.2). Esto trae como consecuencia que el problema de optimización se convierta en no-lineal y que, de este modo, los algoritmos clásicos no sean capaces de resolverlo. Afortunadamente, existen diversas alternativas que tienen en cuenta este inconveniente las cuales se exponen a lo largo de este capítulo.

Inicialmente, Takehara desarrolló una técnica de optimización de carteras que contempla restricciones realistas [Takehara, 1993] la cual emplea un algoritmo de punto interior para resolver tres tipos de modelos diferentes, entre ellos, el de la Media-Varianza. En él se muestra cómo esta estrategia se comporta especialmente bien en la optimización de carteras a gran escala.

De igual modo Perold, a partir de su primer trabajo [Perold, 1984], también ha dedicado sus líneas de investigación a la resolución de este tipo de modelos con restricciones. En este trabajo inicial propone un algoritmo que resuelve el modelo de la Media-Varianza a gran escala; su objetivo es hacer de ésta una técnica eficaz computacionalmente hablando y aplicable a la amplia



gama de modelos de cartera usados en el mundo de la inversión. Aunque está basada en la programación cuadrática, se diferencia de su versión más común en cómo se establece la matriz de varianzas-covarianzas en función de los rendimientos (disminuye su densidad mediante la pequeña adición de algunas variables o restricciones) o en la inclusión de costes y límites de transacción. Por desgracia, no se contempla la restricción de cardinalidad.

Movidos por las dificultades que presentan los métodos tradicionales de optimización a la hora de trabajar con restricciones reales, [Crama and Schyns, 2003] proponen un enfoque de “Temple Simulado” o *Simulated Annealing* el cual da solución a un modelo complejo de selección de carteras que contempla este tipo de restricciones. Para ello, lo plantean como una mezcla de problemas de programación entera-cuadrática mostrando resultados que demuestran la efectividad de su técnica ante estas situaciones.

Aunque existen otros trabajos relacionados, en general se ha mostrado poco interés en la aplicación de heurísticas de búsqueda local para la solución del problema de selección de carteras. Sin embargo, en los últimos años la Computación Evolutiva se ha comenzado a utilizar con frecuencia hasta convertirse en una de las técnicas más empleadas para la resolución de este tipo de problemas.

### 2.3.1. La Computación Evolutiva en la Optimización de Carteras

En general, la Computación Evolutiva es una de las técnicas más comunes para la resolución de problemas de optimización, tanto numérica como combinatoria, así como de aprendizaje. Principalmente se emplea en problemas con espacios de búsqueda extensos y no lineales gracias a su capacidad de localizar soluciones en un tiempo razonable, en donde otros métodos no son capaces de encontrarlas; es por ello que se le considera una técnica fundamental que es utilizada tanto en optimización de carteras como en otras aplicaciones. En este contexto se pueden diferenciar dos tipos de implementaciones basadas en metaheurísticas: aquellas en las que se transforma el problema multiobjetivo en uno mono-objetivo, y aquellas que emplean direc-

tamente algoritmos multiobjetivo que optimicen a la vez todos los objetivos del problema.

### Algoritmos Mono-objetivo

Respecto al primer grupo, se puede mencionar el trabajo de [Chiranjeevi and Sastry, 2007], el cual transforma el problema multiobjetivo en uno que pueda ser resuelto por algoritmos mono-objetivo. En él, los autores realizan un estudio sobre diferentes modelos de optimización de carteras y emplean un método que, en lugar de conservar el riesgo como función objetivo y establecer el rendimiento en las restricciones, incluye ambos en la función de evaluación y los pondera. Concretamente, en ese artículo se experimenta con problemas de optimización de carteras de cinco objetivos que se obtienen deshaciendo los dos básicos; además, también se contempla la restricción de límites de inversión por activo tanto superior como inferior.

Posteriormente, [Soleimani et al., 2009] emplea un algoritmo genético y extiende el clásico problema de optimización Media-Varianza para que contemple tres de las restricciones realistas más importantes: los costes de transacción, la cardinalidad de activos y una restricción (propuesta por primera vez en este artículo) que controle la capitalización del mercado (o de un sector). Soleimani hace frente a este problema de naturaleza multiobjetivo minimizando el riesgo mientras establece un rango mínimo aceptable de rendimientos en las restricciones. Los resultados de este trabajo muestran cómo la estrategia propuesta se comporta especialmente bien cuando se aplica a un mercado real que tenga en cuenta un gran número de activos en un tiempo aceptable.

Existen también otros trabajos de investigación en los que se emplean algoritmos de enjambres de partículas para resolver el problema de optimización de carteras, entre ellos se puede citar a [Cura, 2009], el cual usa un PSO que aborda el problema teniendo en cuenta la restricción de cardinalidad, o a [Golmakani and Fazel, 2011], que usa otro PSO para resolver el modelo de Media-Varianza teniendo en cuenta la restricción de cardinalidad del anterior en compañía de otras tres: mínimos costes de transacción, capitalización de

mercado (o sector) y *bounds on holdings*. Sin embargo, este último método no consigue mejorar los resultados obtenidos por el AG de [Soleimani, 2007] cuando se trabaja con carteras de 9 activos, ocurriendo el efecto contrario cuando se optimizan carteras de gran escala con 150 activos. Por último, citar el trabajo de [Zhu et al., 2011] que también prueba un PSO en diferentes carteras de inversión con y sin restricciones.

### Algoritmos Multiobjetivo

El interés sobre el uso y desarrollo de algoritmos multiobjetivo evolutivos (MOEAs) en la optimización de carteras ha ido en aumento dando lugar a diferentes trabajos de investigación [Coello and Lamont, 2004a]. Aunque se han realizado estudios sobre su posible combinación con otras técnicas, tales como la programación lineal [Subbu et al., 2005], su utilidad como tal en este campo ha sido consolidada en diferentes publicaciones, algunas de las cuales se analizan a continuación.

Existen diversos trabajos comparativos que enfrentan y analizan varios algoritmos multiobjetivo que resuelven el modelo de Markowitz, entre ellos merece la pena citar a [Skolpadungket et al., 2007], el cual trabaja con una extensión del problema de la Media-Varianza que contempla tres restricciones reslistas: cardinalidad de activos, *round lot* y proporción mínima a invertir por cada activo. Empleando el indicador de calidad que mide la distancia generacional (GD en adelante) entre el frente de pareto obtenido por los algoritmos y el frente óptimo real que podría haberse alcanzado, y otro que mide la diversidad de los frentes, este artículo presenta un estudio en donde enfrenta cinco conocidos MOEAs tales como VEGA, Fuzzy VEGA (emplea lógica difusa para combinar los objetivos), MOGA, SPEA2 y NSGA-II. Sus resultados muestran cómo las últimas cuatro metaheurísticas (basadas en la jerarquización de pareto) mejoran, en general, las soluciones dadas por el método poblacional VEGA. Al igual que ocurre en otros trabajos de investigación, aquí se concluye que SPEA2 es el algoritmo que mejor se comporta (incluso si se emplean pocas generaciones) tanto en términos de GD como en términos de diversidad. NSGA-II en cambio, aunque obtiene valores de

distancia cercanos SPEA2, aporta frentes peor distribuidos, diversidad que empeora en el caso de la versión de VEGA con lógica difusa; con MOGA sin embargo ocurre el efecto contrario.

Un año después, los autores de [Radziukyniene and Xilinskas, 2008] comparan el comportamiento de los algoritmos FastPGA, MOCELL, AbYSS y NSGA-II utilizados para la optimización de carteras sin restricciones empleando la versión básica bi-objetivo del modelo de Markowitz frente a una versión tri-objetivo en la que se considera la rentabilidad por dividendo como tercer objetivo. Empleando cuatro indicadores de calidad comúnmente utilizados (hipervolumen, diversidad y distancia generacional directa e inversa) más el tiempo de computación para evaluar los resultados, se concluye que, para la versión bi-objetivo, MOCELL es el algoritmo que mejor se comporta en la mayoría de las métricas aplicadas; en cambio, en la versión tri-objetivo ya no existe un algoritmo que claramente se pueda considerar superior a los demás.

En la misma línea se publica [Mishra et al., 2009], que emplea la versión multiobjetivo de los enjambres de partículas MOPSO para resolver el problema de optimización de la Media-Varianza que maximiza el rendimiento a la vez que minimiza el riesgo de las carteras. Mediante el uso de un conjunto real de datos, realiza un estudio comparativo entre MOPSO, PSFGA, SPEA2 y NSGA-II. Se concluye que MOPSO se comporta mejor que el resto en dos de las tres métricas estudiadas, las cuales miden la diversidad y el hipervolumen de los frentes; sin embargo, en esta investigación los autores no consideran la existencia de otras restricciones que provengan del mundo real financiero.

Del mismo modo merece la pena mencionar a [Anagnostopoulos and Mamanis, 2011], cuyo reciente trabajo también realiza comparativas entre MOEAs que operan con el modelo de Markowitz y tienen en cuenta la restricción de cardinalidad de activos. Empleando las métricas que miden el hipervolumen y la diversidad de [Zitzler and Thiele, 1999, Zitzler et al., 2002], los autores muestran un estudio sobre el comportamiento de los algoritmos NPGA2, NSGA-II, SPEA2, PESA, e-MOEA [Hanne, 2007] y una variante de una estrategia mono-objetivo a la que denominan SOEA, en el que usan

conjuntos de datos de entre 31 y 225 activos. Los resultados muestran como SPEA2 es superior al resto, seguido por NSGA-II y e-MOEA. En general, se concluye que todos los MOEAs, aún utilizando menor número de generaciones, superan a la variante SOEA requiriendo, además, menor tiempo computacional para su ejecución. Al igual que el trabajo anterior, no se tiene en cuenta ninguna restricción realista.

Finalmente, también es importante citar a [Deb et al., 2011], que diseña una versión de su famoso algoritmo NSGA-II adaptado al modelo de Markowitz para que opere con dos restricciones adicionales: la cardinalidad y los límites de inversión tanto superior como inferior. Esta adaptación consiste en modificar los operadores genéticos de cruce y mutación, así como del que inicializa la población al comienzo del algoritmo, para que todos los individuos generados cumplan las restricciones mencionadas. Deb y su equipo comparan este NSGA-II híbrido con la técnica tradicional de programación cuadrática, concluyendo que tanto un método como el otro aportan resultados fiables. Aunque teóricamente la QP se comporta un poco mejor, en la práctica demuestra ser muy poco flexible y con una complejidad que aumenta considerablemente a la hora de extender el problema al uso de restricciones realistas. En cambio, los autores también demuestran que la aplicación de algoritmos genéticos en este tipo de problemas aporta la flexibilidad necesaria para poder adaptarse a la optimización de carteras del mundo real financiero.

## 2.4. Robustez en la teoría de Carteras

A pesar de la gran cantidad de trabajos de investigación llevados a cabo sobre la optimización de carteras, aún quedan abiertos determinados aspectos a mejorar. Un elemento clave es la robustez de los resultados que proveen los algoritmos de optimización, pues la *fiabilidad* de las soluciones es uno de los factores más tenidos en cuenta por los gestores de carteras a la hora de evaluarlas. Debido a que generalmente las estimaciones para el riesgo y rendimiento son incorrectas, ocurre que la frontera eficiente esperada se sitúa lejos de la real haciendo que sus carteras sean bastante imprecisas, razón por la cual es comprensible que los profesionales desconfíen de este tipo de técnicas.

Como se ha expuesto en las secciones anteriores, el proceso de optimización del riesgo y rendimiento de una cartera se fundamenta en dos parámetros: las estimaciones para los rendimientos de los activos y la matriz de varianzas-covarianzas; los valores de estos parámetros están generalmente basados en datos históricos que, debido a la influencia de factores externos, poseen cierta incertidumbre. En este contexto existen diferentes maneras de abordar el problema aunque son dos las más utilizadas en la literatura, una pone más empeño en conseguir estimaciones robustas para los parámetros (mediante su filtrado), y la otra controla dicha robustez gestionando el proceso de optimización.

### 2.4.1. Primer Enfoque

Dentro de la primera forma de abordar la robustez, se encuentra el trabajo de [Perret-Gentil and Victoria-Feser, 2003] donde se realiza un estudio que demuestra, tanto numérica como analíticamente, que el uso de estimaciones robustas en lugar de las clásicas media y covarianza incrementan mucho la estabilidad de las carteras optimizadas. Los autores argumentan cómo aquellos datos históricos que representen situaciones extremas pueden llegar a sesgar en gran medida la media, covarianza y los coeficientes de correlación de la muestra empleada para calcular las estimaciones provocando a su vez que éstas últimas no sean fiables. Por ello, en el artículo anterior se propone utilizar

el *gross error sensitivity* para detectar dichos rendimientos atípicos que influyen de manera negativa (aportando ruido) en el estimador de pesos óptimos para las carteras (ver como ejemplo la figura 2.6), y se sugiere reemplazar el estimador clásico por el método “TBS estimator” [Rocke, 1996], el cual dicen resulta ser muy eficiente comparado con otros estimadores robustos.

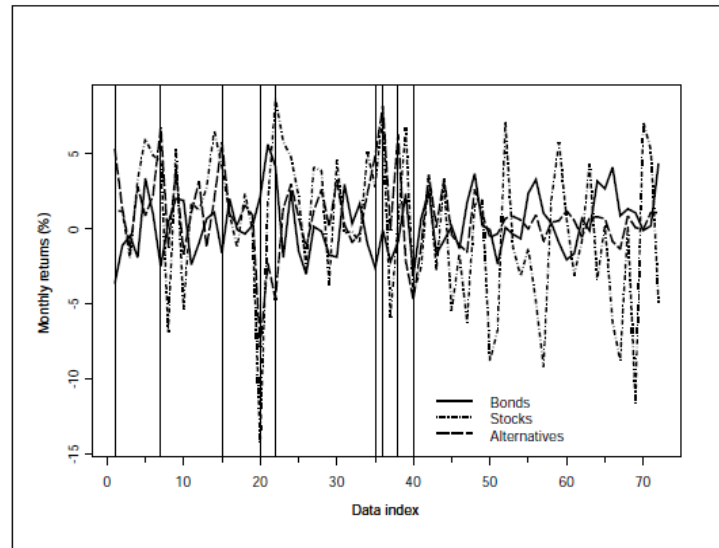


Figura 2.6: Rendimientos logarítmicos mensuales para la muestra *US dollar* de 72 índices que cubre desde Enero de 1997 a Diciembre de 2002. Las nueve líneas verticales se corresponden con los nueve rendimientos más influyentes detectados por el *gross error sensitivity* [Perret-Gentil and Victoria-Feser, 2003].

La “Teoría de Matrices Aleatorias” o *Random Matrix Theory* (RMT en adelante) también ha sido empleada para este fin. Originariamente fue desarrollada por Dyson y Meta para explicar los niveles de energía de núcleos complejos, más recientemente ha sido utilizada para filtrar el “ruido” en series temporales financieras, particularmente en sistemas de gran dimensión como los mercados de valores. [Plerou et al., 1999, Plerou, Gopikrishnan, Rosenow, Amaral and Stanley, 2000, Plerou, Gopikrishnan, Rosenow, Amaral and Stanley, 2000, Plerou et al., 2001, 2002] analizaron dichos mercados y encontraron que los valores propios de una matriz de correlación de rendimientos son con-

sistentes con aquellos pertenecientes a las matrices de correlación obtenidas a partir de rendimientos calculados completamente al azar, a excepción de un pequeño grupo de autovalores de gran tamaño. Por otra parte, sus hallazgos indican que estos valores propios más grandes, que no se ajustan a los rendimientos aleatorios, tenían vectores propios que son más estables en el tiempo. Plerou demuestra en su artículo [Plerou et al., 2002] que las técnicas de filtrado basadas en RMT pueden ser beneficiosas en la optimización de carteras pues reducen el riesgo observado realizando una mejor previsión del mismo. La técnica de este último artículo es explicada en detalle en el capítulo 8 y utilizada para comparar con los métodos desarrollados en esta tesis doctoral.

### 2.4.2. Segundo Enfoque

Las líneas de investigación que se han centrado en el segundo enfoque manejan la imprecisión de parámetros durante el proceso de optimización. Existe una tendencia a ayudarse del uso de diferentes conjuntos factibles de parámetros para localizar las carteras más robustas. Véase por ejemplo el trabajo de [Tütüncü and Koenig, 2004], el cual desarrolla un algoritmo que genera carteras eficientes y robustas frente a, incluso, los peores escenarios posibles. Los autores exponen que, a pesar de que el problema de la asignación robusta de activos pueda resolverse reduciéndose a un problema simple de optimización de Media-Varianza bajo ciertos supuestos, existen situaciones en las que éstos no se sostienen y por tanto no se puede computar de forma lineal (por ejemplo localizando primero los datos más problemáticos y generando después la mejor asignación de activos para ellos). Como posible solución a este inconveniente, en este trabajo se propone una modificación del modelo de Markowitz hacia una versión más robusta que resuelve el problema empleando diferentes conjuntos de parámetros lo más inciertos posible. Estos nuevos escenarios son generados remuestreando los rendimientos de la muestra de datos original mediante el método de *bootstrap*. Valiéndose de esta formulación, los autores proponen la siguiente estrategia para hallar la frontera eficiente de carteras:



1. Seleccionar el mejor y el peor rendimiento esperado.
2. Discretizar el rango entre ambos extremos para obtener un número finito de niveles intermedios.
3. Resolver el problema robusto mencionado y encontrar las carteras más eficientes para cada uno de estos niveles empleando el algoritmo SP (*saddle-point algorithm*) [Halldorsson et al., 2003], variante del conocido “método del punto interior”.

Los resultados de esta investigación validan la utilidad de la estrategia propuesta y reflejan que, cuanto mayor es el tamaño del conjunto de escenarios remuestreados utilizado, mayor robustez presentan las carteras ante los peores escenarios y mejor se comportan ante los más probables.

Un año más tarde, [Farrelly, 2006] propone otro método de optimización del riesgo y rendimiento en carteras que disminuye la inestabilidad de las mismas cuando son calculadas siguiendo el modelo de Markowitz. Con el fin de conseguir fronteras eficientes lo más cercanas posible a las observadas *a posteriori*, el autor emplea la simulación de Monte Carlo para generar un conjunto de escenarios factibles para cada uno de los activos a considerar. A continuación, calcula la frontera eficiente según el modelo de la Media-Varianza de cada escenario utilizando sus rendimientos. Para identificar las carteras robustas se mide por escenario la distancia entre cada cartera evaluada bajo los parámetros estimados en función de dicho escenario y los reales, observados *a posteriori*. Con el fin de penalizar estas diferencias, cada distancia es elevada a una potencia  $\lambda$ , de este modo dicho valor se puede ajustar en función de lo preocupados que estén los inversores por la robustez en las carteras. Por tanto, la cartera que para un nivel de riesgo dado tenga la menor suma de diferencias elevadas a  $\lambda$  a lo largo de todos los escenarios pasa a ser su cartera más robusta. Finalmente, la frontera eficiente se construye con la unión de las soluciones robustas escogidas para cada nivel de riesgo.

En el mismo año se publica [Idzorek, 2006] que combina los modelos de Black-Litterman [*Global Portfolio Optimization*, 1992] y “resampled MVO” (optimización de la Media-Varianza con remuestreo) para lidiar con las de-

ficiencias del modelo de Markowitz tales como la falta de robustez en las carteras. El primero tiene como función encontrar un conjunto de rendimientos esperados que se comporten bien dentro de un optimizador; para ello emplea una técnica Bayesiana que combina, en función del rendimiento previsto de uno o más activos, la valoración subjetiva del inversor con el grupo de rendimientos esperados (hallados por el modelo CAPM) para crear un conjunto mixto. El segundo modelo utilizado vuelve a hacer uso del remuestreo empleando la simulación paramétrica de Monte Carlo para generar un conjunto de escenarios factibles optimizando, cada uno de ellos, mediante el modelo de Markowitz; finalmente, se computa la frontera eficiente media a partir de las obtenidas en cada proceso de optimización. En la experimentación llevada a cabo, el autor demuestra como la combinación de ambas estrategias resulta ser muy útil para incrementar la robustez en las carteras.

A su vez, [Ceria and Stubb, 2006] presenta un método matemático de optimización robusta que considera la incertidumbre en los parámetros de forma directa y explícita. Un año más tarde, [Pflug and Wozabal, 2007] emplea una estrategia “maximin” que utiliza un conjunto de confianza para lidiar también con la ambigüedad en los parámetros y aportar mayor robustez en las carteras.

Más recientemente, [Hassan, 2008] propone cuatro formas de medir la robustez en las carteras: la primera evalúa la calidad de las mismas en el nuevo entorno, la segunda calcula lo que se han alterado los objetivos y el rango con respecto a otras soluciones del frente, la tercera comprueba cuántos individuos que eran no-dominados en las etapas de entrenamiento lo continúan siendo en la validación, y la cuarta mide la diversidad de las carteras que componen el frente final una vez éste ha sido evaluado sobre los parámetros empleados para el test. Además de lo anterior, los autores también desarrollan una versión robusta del conocido algoritmo multiobjetivo SPEA2 que también contempla restricciones propias del mundo real. Dicha versión consiste en incorporar una medida en la función de fitness del algoritmo que evalúe la robustez del individuo influyendo en dicha función de la siguiente manera:

- Al final de cada generación y una vez se identifica el frente de Pareto, se procede a:
  1. Identificar los rangos normalizados entre los que se encuentran las soluciones.
  2. Evaluar cada solución en un escenario diferente tomado a partir del conjunto de datos e identificar los rangos de cada individuo en este nuevo grupo de parámetros.
  3. Asignar un valor de robustez a cada solución en función de lo poco que haya variado su rango.
  4. Incrementar el fitness de cada individuo con dicha medida de robustez.
- Cuando se ejecute el operador de selección por torneos, tendrán preferencia aquellos individuos no-dominados que pertenezcan a regiones menos pobladas del frente y sean más estables frente a los diferentes escenarios a los que se han sometido a lo largo del proceso evolutivo.

Por tanto, en este trabajo se trata la robustez como medida de penalización sobre el valor de fitness de cada individuo; dicho método se contrasta mediante los resultados presentados, los cuales muestran un incremento significativo de la estabilidad de las carteras proporcionadas.

Finalmente, merece la pena citar el trabajo de [Gregory et al., 2008]. En él, los autores dan diversas definiciones sobre el coste que conlleva incrementar la robustez de las carteras. También tratan la metodología para optimización robusta de [Bertsimas and Sim, 2004] en combinación con la técnica “min-regret” (estrategia que minimiza el peor caso posible). Los resultados presentados en este artículo muestran la utilidad de los modelos robustos planteados bajo un coste aceptable. También se concluye que, cuanto mayor sea el conjunto de parámetros con incertidumbre a manejar, mayor será el coste asociado a la optimización de sus carteras y más se mejorará la robustez de las mismas.

A pesar de los múltiples trabajos de investigación referentes a la robustez en la optimización de carteras, tan sólo se ha encontrado uno en el que se opere con las restricciones surgidas a partir del mundo real financiero previamente comentadas. Por esta razón, tomando como referencia los artículos expuestos en esta sección y los estudios de [Jin and Sendhoff, 2003] y [Gupta and Deb, 2005] sobre el manejo de la robustez en optimización multiobjetivo en general con restricciones, en esta tesis doctoral se han desarrollado tres métodos que incrementan la robustez en la optimización de carteras. Éstos también contemplan las dos restricciones realistas que se consideran más importantes: la cardinalidad de activos (ec. 2.14) y los límites superior e inferior de inversión (ec. 2.15). Dichas técnicas robustas pueden encuadrarse dentro de esta segunda categoría.

## Capítulo 3

# Planteamiento General de las Soluciones Propuestas

Este capítulo define exactamente el problema abordado en esta tesis doctoral así como la técnica desarrollada para ello. Dicha estrategia consiste en una adaptación para los algoritmos evolutivos multiobjetivo a la optimización robusta de carteras con el fin de hacerlos capaces de encontrar, no sólo soluciones próximas a la frontera eficiente, sino también estables. De esta estrategia surgen tres métodos, detallados en los próximos capítulos, cuyas características comunes (tales como su funcionamiento, estructura, codificación o características propias de su función de fitness) se describen en las secciones siguientes.

### 3.1. Definición Formal del Problema Específico

Dentro del marco de esta investigación se hacen referencia a algunos conceptos que es importante definir. Entre ellos, se entiende por **escenario** como una situación que viene definida por un conjunto de parámetros y sus estimaciones de rendimientos y matriz de varianzas-covarianzas asociada. Además, el cálculo de estas estimaciones es necesario para evaluar tanto el rendimiento como el riesgo de una cartera.

Por otro lado, la **estabilidad** de una cartera representa la capacidad que

ésta tiene para enfrentarse a diferentes situaciones; concretamente mide su sensibilidad, en términos de su rentabilidad y riesgo, ante posibles desviaciones con respecto a las estimaciones de parámetros (rendimientos esperados y matriz de varianzas-covarianzas). A esta propiedad también se le conoce como robustez de una cartera, y por ello a lo largo de este documento se utilizarán ambos conceptos indistintamente.

Aunque las estimaciones de los parámetros pueden calcularse de diversas maneras, generalmente se utilizan los datos históricos de rendimientos para tal fin, como ocurre en esta tesis doctoral (sección 4.1). Asimismo, tal y como muestra la sección 2.2, en la “Teoría Moderna de Carteras” existe más de una manera de calcular el riesgo de una cartera; de igual modo, se abre un gran abanico de restricciones auxiliares que pueden ser tenidas en cuenta. Con el objetivo de aclarar el dominio de esta investigación, a continuación se define formalmente el problema concreto a resolver por los métodos de optimización robusta desarrollados en esta tesis doctoral. Éste consiste en:

- Minimizar el **riesgo** de una cartera  $p$  (definido por su desviación típica):

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}} \quad (3.1)$$

- Maximizando su **rendimiento**:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \quad (3.2)$$

- Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.3)$$

$$0 \leq w_i \leq 1; i = 1 \dots n \quad (3.4)$$

donde  $n$  es el número de activos disponibles,  $\mu_i$  el rendimiento esperado para el activo  $i$ ,  $\sigma_{ij}$  es la covarianza (definida en la ecuación 2.10) entre el activo  $i$  y  $j$ , y  $w_i$  son las variables de decisión (pesos) que establecen la composición de la cartera. Las restricciones impuestas por el modelo son las

definidas en 3.3 y 3.4 las cuales requieren inversión de fondos completa y limitan las operaciones a crédito.

Además, se ha decidido satisfacer las dos restricciones que se consideran más útiles y necesarias, tal y como se tendrían en cuenta en el mundo real [Barbosa and Lemonge, 2005]. Éstas son:

- Cardinalidad: es posible definir el máximo  $C_{max}$  y mínimo  $C_{min}$  número de activos en los cuales es posible invertir ( $w_i \neq 0$ ):

$$C_{min} \leq \sum_{i=1, (w_i \neq 0)}^n w_i \leq C_{max} \quad (3.5)$$

- Valores límite de inversión: cada peso  $w_i$  debe contener un valor comprendido en el intervalo  $[lim_{inf}, lim_{sup}]$  previamente definido:

$$\begin{aligned} 0,0 &\leq lim_{inf} \leq w_i \\ w_i &\leq lim_{sup} \leq 1,0 \\ lim_{inf} &\leq lim_{sup} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Todas estas ecuaciones se resuelven por un conjunto de soluciones que constituyen la frontera eficiente (definida en la sección 2.2) del problema y que, representadas en el espacio de objetivos riesgo/rendimiento, definen una curva similar a la de la figura 3.1. Estas carteras poseen la cantidad mínima de riesgo posible para un rendimiento dado (y viceversa); por tanto, todos los puntos que queden situados por debajo de la frontera eficiente carecerán de interés pues estarán dominados por los demás, lo que implica que la relación entre sus objetivos no es la mejor que se ha alcanzado.

## 3.2. Motivación y Marco Teórico

Según se ha comentado en capítulos anteriores, incluso si la “Teoría Moderna de Carteras” está muy consolidada actualmente, es habitual encontrar gestores de carteras que dudan de su fiabilidad a efectos prácticos, siendo

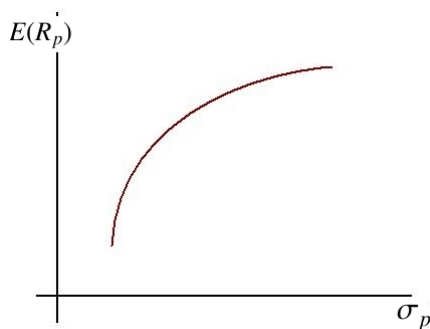


Figura 3.1: Apariencia de la Frontera Eficiente

la sensibilidad de las soluciones a la exactitud de los parámetros una de las razones principales. Por este motivo, dar solución a este problema se ha convertido en una de las líneas de investigación más importantes dentro del campo de la optimización de carteras.

Independientemente del método escogido, un proceso de optimización necesita conocer las estimaciones futuras tanto del rendimiento de los activos como de su matriz de varianzas-covarianzas. Empíricamente, se puede observar que las desviaciones en estos parámetros pueden conducir a fronteras compuestas por carteras cuya sensibilidad y sesgo se comportan de forma diferente a lo esperado. El control de este problema se ha intentado abordar de formas muy distintas; existen diversos estudios en la literatura que intentan controlar la incertidumbre en las estimaciones mediante el filtrado de parámetros, mientras que otros gestionan el control de la incertidumbre en el propio proceso de optimización, y es dentro de éste segundo enfoque donde se pueden encuadrar los métodos robustos diseñados en esta tesis doctoral.

Se piensa que la sensibilidad en las carteras calculadas por los métodos comunes de optimización puede deberse a la utilización de un único escenario (el estimado) en el proceso de cálculo. Éste hecho puede provocar que las soluciones estén muy especializadas en dicho conjunto de parámetros y se muestren poco robustas ante cualquier alteración no prevista una vez el escenario real haya sido observado. Con el fin de evitar en la medida de lo posible esta situación, sería interesante encontrar aquellas carteras que sean estables en más de un escenario para que en la práctica se muestren robustas ante



cambios bruscos en los parámetros y aporten mayor seguridad; precisamente en esta idea se inspiran los tres enfoques diseñados en esta tesis doctoral.

Los citados enfoques guardan relación con dos alternativas basadas en el remuestreo de parámetros [Shiraishi, 2008, Ruppert, 2006] descritas en el estado del arte. Posiblemente, la técnica más cercana a las que se sugieren sea aquella propuesta por [Idzorek, 2006]; en ella se combina un método de programación cuadrática con la simulación de Monte Carlo para obtener un conjunto de frentes que posteriormente se fusionan en una única solución. Sin embargo a pesar de ser una idea muy interesante, ésta sufre las desventajas asociadas al uso de la programación cuadrática mencionadas anteriormente, tales como la capacidad de contemplar restricciones asociadas al mundo real, motivo por el cual en esta tesis se hace uso de MOEAs pues no sufren dicha limitación.

Inicialmente se desarrolló una primera aproximación como paso previo a los modelos presentados en este documento. Dicho procedimiento resuelve el problema sin restricciones realistas y controla la robustez de forma implícita empleando el método de remuestreo descrito en la sección 3.5.1 para obtener un nuevo escenario por generación sobre el cual evaluar los nuevos individuos. Los resultados fueron satisfactorios pues las carteras generadas resultaron ser más robustas que las obtenidas por los algoritmos estándar.

En el resto del capítulo se describen las características comunes a los tres enfoques robustos diseñados: el método de inclusión de la robustez como objetivo, método de evaluación con remuestreo y método de marcado de tiempo con remuestreo.

### **3.3. Estructura General**

La estrategia de adaptación de MOEAs para la optimización robusta de carteras se integra directamente en las metaheurísticas con las que se va a trabajar. Es decir, su implementación no se ha realizado como módulo externo el cual se aplique a priori o posteriori al conjunto de soluciones de la metaheurística, sino que está formado por pequeños módulos que se acoplan en distintas partes del algoritmo sin alterar el resto. Concretamente, se han

desarrollado cuatro módulos:

1. Codificación del cromosoma (sección 3.4.1). Afecta a la codificación de la información de los individuos.
2. Reparación de los individuos de la población (sección 3.4.2). Los individuos son reparados para cumplir las distintas restricciones impuestas por el modelo. Dicha reparación debe ejecutarse durante de la inicialización y después de aplicar los operadores genéticos (antes de ser evaluados).
3. Función de evaluación (sección 3.5).
4. Procesamiento final de los frentes. Se aplica sobre el conjunto de soluciones que el MOEA devuelve al final de su ejecución. Como este procedimiento varía según la función de fitness empleada, éste se explica detalladamente en los capítulos 5, 6 y 7.

Dentro del marco de esta tesis, este método ha sido adaptado en cuatro conocidos y eficientes algoritmos evolutivos multiobjetivo: NSGA-II, SPEA2, SMPSO y GDE3. Todos ellos se encuentran detallados en la sección 2.1.3. NSGA-II [Deb et al., 2002] es uno de los algoritmos más referenciados en el campo de la optimización multiobjetivo. Tanto esta metaheurística como SPEA2 [Zitzler et al., 2001], han demostrado ofrecer muy buen rendimiento en la optimización de carteras [Skolpadungket et al., 2007]. Además de los mencionados, también se escoge la estrategia de evolución diferencial GDE3 [Kukkonen and Lampinen, 2005] y otra basada en la optimización mediante enjambre de partículas SMPSO [Nebro et al., 2009].

Como punto de partida se ha utilizado la herramienta *jMetal*, de la que se han usado los cuatro algoritmos mencionados. La programación de los enfoques y resto de modificaciones sobre los algoritmos se han realizado sobre la herramienta (incluyendo la implementación de los nuevos indicadores de calidad definidos para evaluar los resultados). Sin embargo, este entorno de trabajo no ha sido utilizado en la programación de los scripts creados para manejar los resultados, la extracción de sus contrastes estadísticos o la generación de gráficas; para ésta última se usó la herramienta GNUPlot.

### 3.3.1. Framework jMetal

El entorno de trabajo *jMetal* [Durillo et al., 2010] ha sido desarrollado bajo la tecnología Java (en su versión 6.0 del SDK). Al tratarse de un lenguaje de programación comúnmente utilizado, posee muchas librerías desarrolladas que cumplen distintas tareas. Con el fin de facilitar la codificación de ciertas funciones, se ha utilizado una de estas librerías que proporciona Apache Commons (Commons-Math) para Java.

El nombre de *jMetal* proviene de Java Metaheuristics Algorithms, y es un framework orientado a objetos basado en Java. Está enfocado al desarrollo, experimentación y estudio de metaheurísticas para resolver problemas de optimización multiobjetivo. Aprovechándose de la reutilización de código, los algoritmos comparten los mismos componentes base, lo que facilita el desarrollo de nuevos MOEAs además de los que ya posee implementados. jMetal también proporciona diferentes problemas modelo e indicadores de calidad para evaluar los resultados y, gracias a su completa estructura de clases, permite al usuario crear otros nuevos. Asimismo, este entorno de trabajo facilita la paralelización de los experimentos mediante el uso de hilos.

## 3.4. Cromosoma

Como se ha comentado en capítulos anteriores, los algoritmos evolutivos trabajan con poblaciones de individuos que, mediante la información que contienen codificada en su cromosoma, representan posibles soluciones del problema que desean resolver. De este modo, tanto el diseño como la información del cromosoma son específicos para cada problema.

Esta tesis doctoral está desarrollada dentro del dominio de la “Teoría Moderna de Carteras” bajo determinadas restricciones. Este hecho hace que los individuos tengan una codificación adaptada a dicho problema y que, debido a la alteración que los operadores genéticos producen sobre ellos, necesiten ser reparados en múltiples ocasiones durante el proceso evolutivo para satisfacer las restricciones del problema. A continuación se describe con más detalle tanto la codificación como la reparación de dichas soluciones.

### 3.4.1. Codificación

La codificación elegida implementa para cada individuo una cartera de inversión que se representa mediante un vector de pesos  $w_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) que se corresponden con el porcentaje de inversión por activo (en tanto por uno). Como estos pesos son números reales, los algoritmos trabajan únicamente con elementos reales en lugar de binarios.

Debido a que el conjunto de datos elegido para evaluar los resultados de este trabajo (explicado más adelante en la sección 4.1) contiene carteras con ocho activos de inversión, se utilizan poblaciones que poseen cromosomas compuestos por ocho pesos ( $w_1 \dots w_8$ ) que toman valores en el intervalo  $[0, 1]$ .

La figura 3.2 muestra un ejemplo de cromosoma que codifica la cartera de inversión representada.

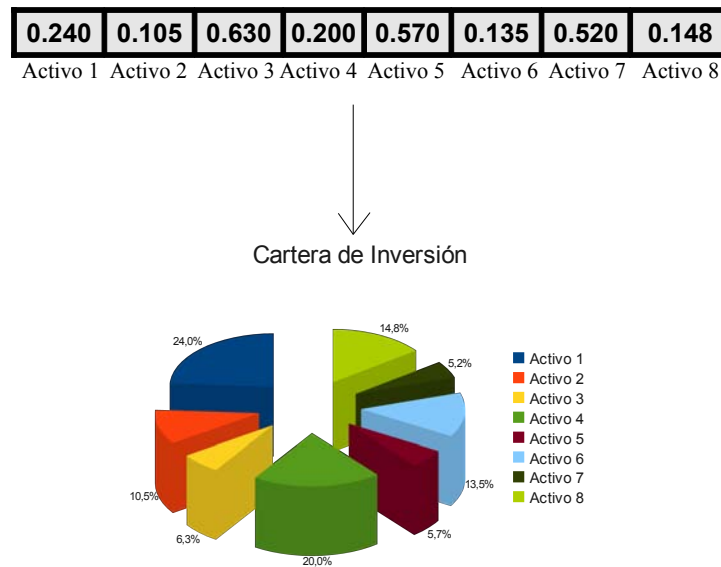


Figura 3.2: Codificación de una cartera de inversión

### 3.4.2. Reparación

Según lo expuesto en la sección anterior, todos los pesos de cada individuo deben tener un valor real comprendido entre cero y uno, y cuya suma total sea 1.0 (representando el 100 % de la inversión). Asimismo, los cromosomas también deben satisfacer las restricciones reales de cardinalidad  $[C_{min}, C_{max}]$  y de limitación de inversión por activo  $[lim_{inf}, lim_{sup}]$ . Por tanto, el cumplimiento de estos requisitos se garantiza mediante la reparación de los individuos para transformarlos en carteras que satisfagan las restricciones impuestas. De este modo, en todas las generaciones del algoritmo la solución se verifica y repara si es necesario antes de calcular su fitness.

En rasgos generales, siempre que el número de activos invertidos en la cartera no respete los límites de cardinalidad, dicho número se ajusta añadiendo o eliminando activos a invertir hasta que se cumpla este requerimiento. En el caso en el que la suma de los pesos  $w_i$  no sea 1.0, se añaden o restan cantidades aleatorias hasta que el ajuste quede hecho. Además, siempre que se modifique el valor de un activo, se asegura que el nuevo valor se encuentre dentro de los límites de inversión  $[lim_{inf}, lim_{sup}]$ .

Para evitar empeorar significativamente el coste computacional, se ha intentado que el proceso de reparación sea lo menos complejo posible y por ello se ha desarrollado un método que tan sólo se aplica al principio del algoritmo, al inicializar la población, y un segundo más avanzado que se utiliza después de la ejecución de los operadores genéticos en cada iteración. La razón por la que el primer método es más sencillo es porque se trata del comienzo del proceso evolutivo, donde la población inicial es generada aleatoriamente, y por tanto no supone ningún problema que los individuos se alteren mucho pues no contienen información genética. Las dos técnicas mencionadas son las siguientes:

- **Reparación durante de la inicialización** de la población. Su procedimiento principal se muestra en el algoritmo 7. Se utiliza porque es importante para el proceso evolutivo comenzar a partir de una población bien construida. Afortunadamente, como este conjunto de individuos se genera aleatoriamente, se puede establecer directamente la

cardinalidad de modo que respete directamente los valores  $[C_{min}, C_{max}]$  establecidos y reparar después tan sólo los pesos de los individuos para controlar que la inversión sea completa. Esta función sólo es ejecutada una vez y apenas requiere coste computacional.

---

**Algorithm 7** Reparación durante de la inicialización

---

```

1: Inicializar la población  $P$  como un conjunto de vectores compuestos por números reales
    $\bar{w}_i = (w_{i1}, \dots, w_{in})$  ;  $w_{ij} \in [lim_{inf}, lim_{sup}]$ 
2: for cada individuo  $\bar{w}_i$  de  $P$  do
3:   Asignar una cantidad aleatoria  $\in [C_{min}, C_{max}]$  de valores 0 a las coordenadas del
   vector  $\bar{w}_i$ 
4:   while  $\sum_{j=1}^n w_{ij} \neq 1$  do
5:     if  $\sum_{j=1}^n (lim_{inf}/w_{ij} \neq 0) > 1$  then
6:       Seleccionar aleatoriamente una coordenada  $j$  del vector  $\bar{w}_i$  tal que  $w_{ij} \neq 0$  y
       asignar  $w_{ij} = 0$ 
7:     end if
8:     if  $\sum_{j=1}^n (lim_{inf}/w_{ij} \neq 0) < 1$  then
9:       Seleccionar aleatoriamente una coordenada  $j$  del vector  $\bar{w}_i$  tal que  $w_{ij} = 0$  y
       asignar  $w_{ij} = lim_{sup}$ 
10:    end if
11:    if  $\sum_{j=1}^n w_{ij} \neq 1$  then
12:      Seleccionar aleatoriamente una coordenada  $j$  del vector  $\bar{w}_i$  tal que  $w_{ij} \neq 0$ 
13:      Sumar/restar la cantidad que falte para hacer que  $\sum_{j=1}^n w_{ij} = 1$  respete los
      límites  $[lim_{inf}, lim_{sup}]$ 
14:    end if
15:  end while
16: end for
17: Devolver  $P$ 

```

---

- **Reparación después de aplicar los operadores genéticos.** El algoritmo 8 muestra un resumen de este complejo procedimiento. Es una ampliación del anterior al que se le añade un ajuste de cardinalidad ya que las soluciones con las que trabaja poseen la suya propia. Aunque esta función se ejecuta para cada individuo que se desee evaluar, el coste de computación del algoritmo se incrementa en poca medida.

### 3.5. Función de Evaluación

Con el fin de encontrar una función de evaluación que sea capaz de medir la robustez teniendo en cuenta la sensibilidad de las soluciones ante diferentes

**Algorithm 8** Reparación después de los operadores genéticos

---

```

1: for cada individuo  $\bar{w}_i$  de  $P$  do
2:   if hay menor número de  $w_{ij} \neq 0$  que  $C_{min}$  then
3:     Establecer aleatoriamente  $w_{ij} = 0$  to  $w_{ij} = lim_{inf}$ 
4:   end if
5:   if hay mayor número de  $w_{ij} \neq 0$  que  $C_{max}$  then
6:     Establecer el  $w_{ij} \neq 0$  con menor valor a  $w_{ij} = 0$ 
7:   end if
8:   while  $\sum_{j=1}^n w_{ij} \neq 1$  do
9:     if  $\sum_{j=1}^n (lim_{inf}/w_{ij} \neq 0) > 1$  then
10:      Seleccionar aleatoriamente una coordenada  $j$  del vector  $\bar{w}_i$  tal que  $w_{ij} \neq 0$  y
      asignar  $w_{ij} = 0$ 
11:     end if
12:     if  $\sum_{j=1}^n (lim_{inf}/w_{ij} \neq 0) < 1$  then
13:      Seleccionar aleatoriamente una coordenada  $j$  del vector  $\bar{w}_i$  tal que  $w_{ij} = 0$  y
      asignar  $w_{ij} = lim_{sup}$ 
14:     end if
15:     if  $\sum_{j=1}^n w_{ij} \neq 1$  then
16:      Seleccionar aleatoriamente un  $w_{ij} \neq 0 \in [lim_{inf}, lim_{sup}]$ 
17:      Sumar/restar la cantidad que falte para hacer que  $\sum_{j=1}^n w_{ij} = 1$  respete los
      límites  $[lim_{inf}, lim_{sup}]$ 
18:     end if
19:   end while
20: end for
21: Devolver  $P$ 

```

---

escenarios, se han desarrollado tres enfoques diferentes que se estudian y evalúan en los próximos capítulos 5, 6 y 7:

1. Método de **inclusión de la robustez como objetivo** adicional a los dos básicos inherentes al problema. La función de fitness considera un objetivo más en el que se evalúa la robustez del individuo. Para ello, se crea por iteración un conjunto de escenarios diferentes (generados por remuestreo) que sirven para evaluar la robustez de las soluciones. Este método considera dicho factor igual de relevante que los objetivos de riesgo y rendimiento, optimizando los tres al mismo tiempo. Véase en detalle este procedimiento en el capítulo 5.
2. Método de **evaluación con remuestreo**. Este método controla la robustez de manera implícita. Su función de evaluación considera los dos objetivos estándar con la salvedad de que, en cada generación, los individuos se evalúan sobre unos parámetros remuestreados diferentes en

lugar de usar los originales. El capítulo 6 muestra un estudio acerca de este método de incremento de robustez.

3. Método de **marca de tiempo con remuestreo**. En este caso se aborda el problema de la sensibilidad de las soluciones incluyendo una marca de tiempo sobre el individuo (como tercer objetivo a maximizar) que recoja el número de generaciones que éste lleva en la población; además, en cada una de ellas, el escenario sobre el que se evalúan el riesgo y el rendimiento es distinto. A diferencia del método anterior, todos los individuos existentes en el MOEA son reevaluados ante el nuevo conjunto de parámetros generado y, gracias a la marca de tiempo, aquellos que hayan sido capaces de conseguir una buena relación de riesgo/-rendimiento ante mayor número de escenarios, serán preservados en la población. El capítulo 7 muestra un análisis completo de esta táctica.

### 3.5.1. Remuestreo de Parámetros

Como se comentaba previamente, esta tesis se fundamenta en que la optimización de carteras sobre la premisa de un sólo escenario (el previsto) podría conducir a soluciones hiperespecializadas en el mismo, y por tanto muy sensibles a errores de predicción en los parámetros. Por esta razón, dado que se piensa que el principal problema consiste en que las soluciones podrían estar hiperespecializándose para una estimación de rendimientos y una matriz de varianzas-covarianzas concreta, tendría sentido enfrentarlas a otros posibles pares estimación de rendimientos/matriz de varianzas-covarianzas (también conocidos como escenarios).

De entre todos los posibles escenarios se piensa que merece la pena centrar la atención en aquellos que sean más probables, y por ello la forma elegida para generar estas combinaciones factibles de parámetros sobre los que evaluar la sensibilidad de los perfiles de las carteras ha sido el remuestreo no paramétrico. Concretamente esta técnica genera series de rendimientos sintéticas a partir de la información histórica disponible y favorece la identificación de conjuntos de parámetros con una estructura similar a la observada. Su funcionamiento viene reflejado en el algoritmo 9; principalmente éste consta



de un bucle que se repite sucesivamente, dentro del cual va seleccionando aleatoriamente periodos de rendimientos a partir de la muestra histórica original  $S$  para ir rellenando un segundo conjunto  $S'$  con el mismo tamaño que el primero. Además, puede ocurrir que cada serie se escoja en más de una ocasión.

---

**Algorithm 9** Método de Remuestreo
 

---

```

1:  $S$  es la muestra original con un tamaño de  $N_s$ .
2:  $S'$  es la nueva muestra con tamaño  $N'_s$ . Al principio,  $S' = \emptyset$  y  $N'_s = 0$ .
3: while  $N'_s \neq N_s$  do
4:   Seleccionar aleatoriamente  $x_i \in S$ .
5:    $S' = S' \cup \{X_i\}$ .
6: end while
7: Devolver  $S'$ 

```

---

Como se comentaba al comienzo del capítulo, el problema de la optimización de carteras que se resuelve en esta tesis utiliza estimaciones de parámetros en su proceso evolutivo; concretamente estas predicciones se calculan haciendo el promedio de los rendimientos históricos y obteniendo la matriz de varianzas-covarianzas asociada. De este modo, cada vez que se utiliza el algoritmo 9 para crear el nuevo escenario  $S'$ , se calculan también sus nuevas estimaciones que además se emplearán a posteriori para evaluar el riesgo y la rentabilidad de las carteras.

Por otro lado es importante indicar que, como en esta tesis se emplea la técnica de ventana deslizante, el algoritmo 9 toma como conjunto original de parámetros  $S$  aquellos periodos correspondientes a la ventana temporal sobre la cual esté operando el MOEA.



## Capítulo 4

# Métodos de Evaluación de Resultados

En este capítulo se describen los diferentes pasos seguidos para el procesamiento y evaluación de los resultados aportados por las técnicas robustas presentadas en esta tesis doctoral. Inicialmente, se habla del conjunto de datos escogido el cual es combinado con el uso de una ventana deslizante. A continuación, se explican y desarrollan los indicadores de calidad especialmente diseñados para la evaluación de la robustez en las carteras. Finalmente, se muestra el test estadístico que se utiliza para contrastar los resultados.

### 4.1. Conjunto de Datos. Ventana Deslizante

Las técnicas desarrolladas en esta tesis doctoral se han validado sobre una muestra de datos obtenida de la fuente *Datastream* [Thomson Reuters, 2012], la cual contiene índices que referencian a grandes categorías de activos muy conocidos en el mundo financiero. Esta muestra está formada por 240 periodos de rendimientos mensuales comprendidos desde Enero de 1990 hasta Diciembre de 2009. La tabla 4.1 muestra su lista de índices.

Con el fin de verificar la utilidad de los métodos robustos desarrollados, cada algoritmo se evalúa ante un gran número de situaciones históricas reales. Para ello, en lugar de utilizar el conjunto de datos en su totalidad,

Tabla 4.1: Conjunto de Datos

Nº	Nombre	Código
1	Frank Russell 2000 Value	FRUS2VA
2	Frank Russell 2000 Growth	FRUS2GR
3	Frank Russell 1000 Value	FRUS1VA
4	Frank Russell 1000 Growth	FRUS1GR
5	S&P GSCI Commodity Total Return	GSCITOT
6	MSCI EAFE	MSEAFEL
7	BOFA ML CORP MSTR (\$)	MLCORPM
8	BOFA ML US TRSY /AGCY MSTRAAA(\$)	MLUSALM

se emplea la técnica de **ventana deslizando** sobre la muestra original. Este método consiste en escoger una ventana temporal de  $n$  periodos mensuales de rendimientos consecutivos que formen el conjunto de datos utilizado.

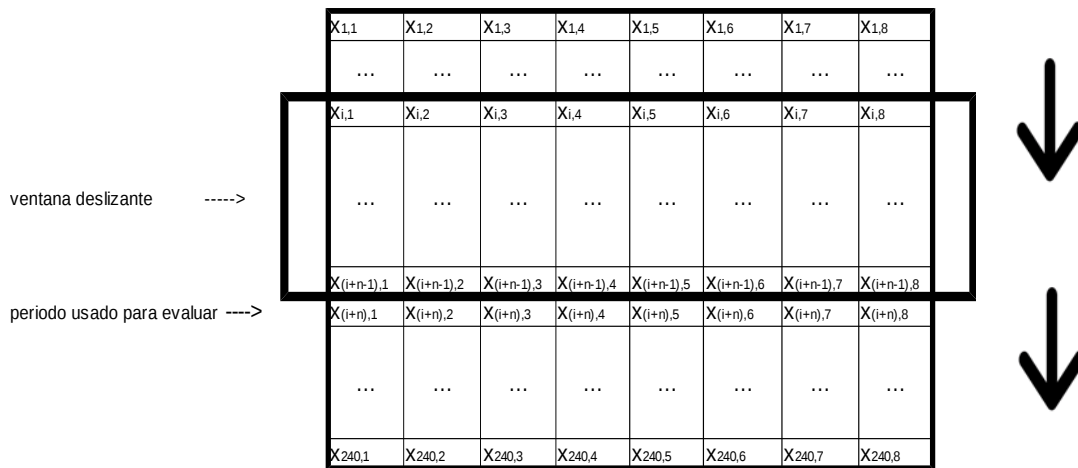


Figura 4.1: Esquema de la ventana deslizando para 8 activos financieros ( $x_{i,j}$  es el rendimiento correspondiente al periodo  $i$  para el activo  $j$ ).

Para esta tesis en concreto se ha establecido el tamaño de la ventana  $n = 120$  periodos de rendimientos, que corresponde a 10 años de datos. De este modo, el algoritmo se basará en los datos de  $t_0$  a  $t_{n-1}$  para identificar las mejores asignaciones para el periodo  $t_n$ . Cada vez, la ventana temporal se desplaza un mes (ver figura 4.1) hasta un total de 120 veces cubriendo el intervalo de 31/01/1990 a 31/12/2009. Por ejemplo, la primera ventana

comprenderá las series desde el 31/01/1990 hasta el 31/12/1999 y se usará el periodo 31/01/2000 para evaluar las soluciones.

Se han llevado a cabo distintos experimentos variando la extensión de la ventana. La razón por la que se ha establecido su tamaño a 120 es porque con  $n < 120$  no se representa suficientemente el histórico de rendimientos como para llevar a cabo una buena predicción; por el contrario, un tamaño de ventana superior a 10 años ralentiza en exceso el proceso de ejecución de los algoritmos. Por lo tanto,  $n = 120$  es el mínimo número de periodos con el que se consiguen mejores estimaciones de los parámetros sin que el coste computacional sea elevado.

## 4.2. Indicadores de Calidad

Los resultados obtenidos por las diferentes metaheurísticas probadas en esta tesis doctoral deben ser evaluados y comparados. Dicha evaluación suele realizarse mediante el uso de distintos indicadores de calidad, donde algunos de ellos además necesitan conocer de antemano el frente óptimo de Pareto. Es comúnmente admitido que no existe un único indicador de calidad que sea perfecto para evaluar las soluciones de un frente en cualquier circunstancia; de hecho, la correcta elección de estos indicadores está considerado en sí como un problema multiobjetivo.

Las métricas generalmente más utilizadas en el estado del arte son *Hypervolume* y *Spread* [Zitzler and Thiele, 1998] ya que proveen medidas de convergencia y diversidad para un valor aislado. Estos indicadores tienen sentido en la mayoría de los problemas multiobjetivo pues lo que interesa es encontrar frentes bien distribuidos y muy dominantes. En cambio las técnicas de optimización de carteras se centran en un único escenario, el previsto, cuyas estimaciones pueden ser poco precisas implicando que las carteras generadas sobre él no sean en absoluto fiables. Por ello, encontrar soluciones con muy buena relación riesgo/rendimiento en base a estos parámetros carece de sentido si su comportamiento bajo los parámetros observados es completamente diferente. Dado que el objetivo principal de esta tesis no es crear frentes fuertemente dominantes y bien distribuidos sobre dichas estimaciones

sino aquellos que contengan soluciones que se mantengan estables ante cambios inesperados en el entorno, las métricas clásicas mencionadas resultan ser poco adecuadas para medir esta propiedad. Por esta razón, se proponen cinco nuevos indicadores de calidad que evalúen diferentes aspectos relacionados con la robustez en las carteras, los cuales se describen a continuación.

#### 4.2.1. Error de Estimación

Este indicador evalúa la diferencia media entre el riesgo y el rendimiento esperado para cada cartera en la frontera eficiente, así como el riesgo y rendimiento actual obtenido a posteriori una vez se han observado los parámetros reales. También se puede definir como la distancia media entre las estimaciones para  $t_n$  basadas en los datos del periodo  $t_0$  a  $t_{n-1}$ , y los valores actuales en  $t_n$ .

Se ha escogido la **Distancia de Mahalanobis** ( $d_M$ ) como instrumento de medida de distancia. Dicha medida, propuesta por Mahalanobis en 1936, determina la similitud entre dos variables cualesquiera  $(\bar{x}, \bar{y})$  que posean más de una dimensión. Se diferencia de la distancia euclídea en que tiene en cuenta la correlación entre las variables aleatorias. Formalmente, se define como:

$$d_M(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(\bar{x} - \bar{y})^T \Sigma^{-1} (\bar{x} - \bar{y})} \quad (4.1)$$

donde  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  son las variables a comparar, y  $\Sigma$  es la matriz de varianzas-covarianzas.

La ecuación 4.2 muestra la definición del error de estimación (EE en adelante), que se calcula midiendo la distancia media ( $d_M$ ) entre  $\bar{x}_p$  y  $\bar{x}_p'$  para todas las carteras que componen el frente de Pareto:

$$EE = \frac{\sum_{p=1}^N [d_M(\bar{x}_p, \bar{x}_p')]^2}{N} \quad (4.2)$$

donde

- $\bar{x}_p$  representa el par  $(E(R_{np}), \sigma_{np}^2)$  calculado de una cartera  $p$  en el periodo  $t_n$  usando los parámetros estimados.

- $\bar{x}_p'$  es el par  $(E(R_{np})', \sigma_{np}^2')$  donde, tanto el riesgo como el rendimiento (de la misma cartera e instante de tiempo), es calculado usando los parámetros reales observados en  $t_n$ .
- $N$  es el número de carteras que componen el frente de Pareto.

Debido a que el objetivo de este indicador es medir la desviación del frente compuesto por las carteras optimizadas para los parámetros esperados y cómo éstas se comportaron ante la situación observada en la realidad, un menor valor de  $EE$  indica que las desviaciones son menos acusadas, y por lo tanto las carteras que componen el frente son más fiables.

#### 4.2.2. Estabilidad

Otro punto muy importante para evaluar la robustez de las carteras es medir su estabilidad ante múltiples situaciones. Se dice que una cartera de inversión es estable si ésta es capaz de adaptarse a diferentes tipos de escenarios sin sufrir grandes desviaciones.

La estabilidad de una cartera se mide, por tanto, mediante el promedio de las distancias de Mahalanobis (e. 4.1) entre el par de riesgo/rendimiento esperado en la frontera eficiente y el riesgo/rendimiento esperado en  $S$  escenarios distintos. Cada uno de estos escenarios representan nuevas situaciones que podrían haber sucedido y están formados por un conjunto de parámetros asignados utilizando la ya estudiada técnica de remuestreo descrita en la sección 3.5.1. Por otro lado, a diferencia del Error de Estimación (el cual tiene en cuenta la disparidad entre los parámetros reales y estimados), este indicador de calidad mide la diferencia media entre el escenario previsto y un amplio rango de escenarios factibles.

Esta métrica ( $ST$  en adelante) se calcula mediante la ecuación 4.3.

$$ST = \frac{\sum_{i=1}^S \frac{\sum_{p=1}^N [d_M(\bar{x}_p, \bar{x}_{pi})]^2}{N}}{S} \quad (4.3)$$

donde  $S$  es el número de escenarios sobre los que se evalúan las  $N$  carteras que componen el frente,  $d_M(\bar{x}_p, \bar{x}_{pi})$  la distancia de Mahalanobis entre el par  $(E(R_{np}), \sigma_{np}^2)$  y el par  $(E(R_{npi}), \sigma_{npi}^2)$ ; este último representa el rendimiento

y riesgo de la cartera  $p$  en el periodo  $t_n$  calculados usando los parámetros del escenario  $i$ .

El factor clave de este indicador de calidad está relacionado con el tamaño del conjunto de datos usado para remuestrear, así como en el número de escenarios generados ( $S$ ). El uso de un gran conjunto de escenarios permite acercarse más a la distribución potencial de los parámetros, y por tanto toda la evaluación de resultados se ha llevado a cabo con  $S = 500$  escenarios.

Como la estabilidad es calculada haciendo el promedio de todas las distancias medias de las carteras del frente de Pareto, cuanto mayor sea el valor de este indicador, más sensibles serán las carteras del frente y en consecuencia menos fiables.

### 4.2.3. Rendimientos Inesperados

Otro aspecto importante para medir la robustez de las carteras es el cálculo de sus Rendimientos Inesperados. Este indicador de calidad, referido como  $UR$ , proporciona una media del rendimiento que faltaría para alcanzar el máximo que se puede llegar a obtener. Es decir, para todas las carteras del frente, el Rendimiento Inesperado se calcula haciendo el promedio de las distancias euclídeas entre el rendimiento observado y el máximo rendimiento potencial para el mismo nivel de riesgo, ambos obtenidos a partir de los parámetros reales.

Formalmente se define como:

$$UR = \frac{\sqrt{\sum_{p=1}^N [R_{npe} - R_{np}]^2}}{N} \quad (4.4)$$

donde  $N$  es el número de carteras de la solución,  $R_{np}$  es el rendimiento de la cartera  $p$  calculada a partir de los parámetros obtenidos a posteriori para el periodo de tiempo  $t_n$ , y  $R_{npe}$  es el máximo rendimiento potencial obtenido para una cartera  $pe$  cuyo riesgo  $\sigma_{npe}^2$  es el más próximo al riesgo  $\sigma_{np}^2$ .

Los máximos rendimientos potenciales se deberían extraer a partir del frente óptimo de Pareto pero sin embargo, debido a que éste no se puede calcular a priori ya que es imposible conocer lo que ocurrirá en el futuro, se



ha realizado una estimación de dicho frente para cada periodo  $t_n$ . Esta estimación es específica para cada MOEA y se ha llevado a cabo sustituyendo las estimaciones de parámetros (en función de los periodos  $t_0 \dots t_{n-1}$ ) empleadas en el proceso evolutivo por los observados en  $t_n$ .

Al igual que el resto, cuanto mayor sea su valor, peor es la cartera pues un alto valor en este indicador indicaría que la mayoría de los rendimientos potenciales no se han alcanzado.

#### 4.2.4. Riesgo Extremo

Otro punto interesante para evaluar la robustez de las carteras es conocer su comportamiento frente a situaciones completamente inesperadas, en concreto ante un conjunto de escenarios especialmente escogidos por ser los peores casos encontrados.

Este indicador de calidad, conocido también como  $ER$ , está basado en el ST descrito en la sec. 4.2.2. Su definición es parecida sólo que, en lugar de usar la media de distancias para todo el conjunto de  $S$  escenarios, se usa otro conjunto que contiene  $W$  situaciones especialmente inesperadas. Para extraer este conjunto se ha generado, por remuestreo y a partir de los parámetros originales, un gran grupo de  $Q$  escenarios de los cuales se han elegido aquellos  $W$  ( $W \ll Q$ ) que mayores desviaciones ( $d_M$ ) provocaban a un cúmulo de carteras escogidas de manera aleatoria para tal fin. Esta desviación  $d_M$  se corresponde con la distancia de Mahalanobis entre el riesgo/rendimiento estimado usando los parámetros originales, y el riesgo/rendimiento de las mismas carteras en cada uno de estos  $W$  escenarios. Formalmente, el indicador de Riesgo Extremo se define en la ecuación 4.5.

$$ER = \frac{\sum_{w=1}^W \frac{\sum_{p=1}^N [d_M(\bar{x}_p, \bar{x}_{pw})]^2}{N}}{W} \quad (4.5)$$

siendo  $W$  el número de escenarios extremos escogido,  $N$  el número de carteras que componen el frente,  $d_M(\bar{x}_p, \bar{x}_{pw})$  la distancia de Mahalanobis entre el par  $(E(R_{np}), \sigma_{np}^2)$  y el par  $(E(R_{npw}), \sigma_{npw}^2)$ ; este último representa el rendimiento y riesgo a partir del escenario  $w$  para la cartera  $p$  en el periodo

$t_n$ .

La aportación fundamental de este indicador es que provee una estimación sobre los resultados que se pueden obtener en el peor de los casos. Es importante destacar que cuanto mayor sea el  $ER$ , más alto será el riesgo de las carteras.

#### 4.2.5. Distancia Euclídea

Además de medir la diferencia entre los frentes previstos y los reales usando una medida que evalúe la distancia global entre dos carteras, también es interesante analizar tanto el riesgo como el rendimiento por separado. De este modo, se puede estudiar el comportamiento de cada objetivo para las distintas técnicas empleadas pues, como se verá en las secciones de análisis de resultados, éstas se ven afectadas de diferente manera.

Puede decirse que el objetivo de este indicador de calidad ( $ED$ ) es evaluar, para cada cartera, la distancia entre el riesgo y rendimiento estimado en la frontera eficiente  $(\sigma_p^2, E(R_p))$ , y el riesgo y rendimiento observado para la misma cartera calculados a partir de los parámetros reales  $((\sigma_p^2)', E'(R_p))$ . Es decir,  $ED$  mide la distancia entre las estimaciones para el periodo  $t_n$  basadas en los datos desde  $t_0$  hasta  $t_{n-1}$ , y los valores actuales para  $t_n$ .

La ecuaciones 4.6 y 4.7 definen formalmente este indicador de calidad en términos de rendimiento y riesgo respectivamente:

$$ED_{E(R)} = \frac{\sqrt{\sum_{p=1}^N (E(R_p) - E'(R_p))^2}}{N} \quad (4.6)$$

$$ED_{\sigma^2} = \frac{\sqrt{\sum_{p=1}^N (\sigma_p^2 - (\sigma_p^2)')^2}}{N} \quad (4.7)$$

donde  $N$  es el número de carteras del frente de Pareto y  $p$  es la cartera a evaluar.

Al igual que ocurre con el Error de Estimación, cuanto más bajos sean sus valores, menor distancia existirá entre el riesgo/rendimiento estimado y el riesgo/rendimiento observado.

### 4.3. Estudios Estadísticos

Una vez calculados los indicadores de calidad sobre los distintos conjuntos de soluciones, es conveniente compararlos desde el punto de vista estadístico.

Tabla 4.2: Ejemplo de tabla con medidas estadísticas

	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
Alg. Estándar	...	...	...	...	...	<i>no procede</i>
Conjunto A	...	...	...	...	...	...
Conjunto B	...	...	...	...	...	...

Se incluirán diferentes medidas estadísticas en tablas como la 4.2. En concreto, nombrados de izquierda a derecha, se calculan: la media del valor de los frentes, su mediana, su varianza, el máximo y mínimo valor de indicador encontrado en el conjunto y, por último, el porcentaje de mejora de la media del conjunto indicado en la primera columna sobre la media de los frentes obtenidos a partir del algoritmo estándar. Concretamente, este último se calcula como  $mejora = (-1) * ((MediaConjuntoA / MediaAlg.Estndar) - 1)$ . Puntualizar que la versión estándar de un algoritmo se refiere a la optimización de únicamente los dos objetivos definidos por modelo de Markowitz (minimización del riesgo y maximización del rendimiento) sin incluir ningún mecanismo adicional de incremento de robustez.

---

#### Algorithm 10 Test Estadístico

---

```

if los valores siguen una distribución Normal (test de Kolmogorov Smirnov) then
  if existe homogeneidad entre varianzas (test de Levene) then
    t-test.
  else
    Test de Welch.
  end if
else
  Test de Wilcoxon (compara las medianas de las soluciones).
end if

```

---

Además, se extraen los contrastes estadísticos considerando los datos como muestras de una función de densidad de probabilidad. Por ello, el algorit-

Tabla 4.3: Valores de significación estadística de A/B (A con respecto a B).

Valor	Significado
=	No existe diferencia significativa
++	El conj. de frentes A es mejor que B con una diferencia significativa del 1 %
+	El conj. de frentes A es mejor que B con una diferencia significativa del 5 %
--	El conj. de frentes A es peor que B con una diferencia significativa del 1 %
-	El conj. de frentes A es peor que B con una diferencia significativa del 5 %

mo 10 aplica un contraste estadístico para comprobar a qué nivel convencional se diferencian los MOEAs estándar de sus versiones robustas. Primero se aplica un *test de Kolmogorov-Smirnov* para determinar si los valores obtenidos siguen una distribución normal (de Gauss). En caso afirmativo, se utiliza el *test de Levene* para comprobar la homocedasticidad de las muestras (igualdad de las varianzas). Si las varianzas son iguales, se realiza un *t-test*; en caso contrario, se usa el *test de Welch*. Para distribuciones no gaussianas, se emplea el *test no paramétrico de Wilcoxon* que compara las medianas de los resultados. Se han establecido dos niveles de confianza para todos los test al 99 % y 95 %, lo que implica niveles de significación de 1 % y 5 %. La tabla 4.3 muestra la codificación de dichos valores usados en las tablas de significación estadística de los resultados.

## Capítulo 5

# Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo

En este capítulo se desarrolla y estudia la primera de las técnicas para incrementar la robustez de las carteras presentadas en esta tesis doctoral. Inicialmente, se describe este enfoque así como su función de evaluación. A continuación se define la selección de parámetros para la experimentación llevada a cabo y se estudian sus resultados, aunque éstos no son comparados con otros métodos robustos hasta el próximo capítulo 8.

### 5.1. Descripción y Función de Fitness

En esta tesis doctoral se parte de la convicción de que una cartera no sólo debe ser adecuada en términos de rentabilidad y riesgo sino que también aporte confianza al inversor. Por tanto, se piensa que un método que sea capaz de evaluar las soluciones candidatas sobre un conjunto de escenarios factibles, identificando aquellas que se comporten especialmente bien en ellos, puede ser eficaz a la hora de solucionar el problema de la robustez planteado. En esta primera aproximación se propone extender el clásico problema de optimización de “varianza-covarianza” para incluir un tercer objetivo explícito que aproxime la robustez de las soluciones considerando su estabilidad ante diversos conjuntos de parámetros potenciales. Este enfoque además tiene la

ventaja de ser capaz de proveer un amplio rango de carteras alternativas clasificadas en función de su estabilidad, lo que permite al gestor de carteras llevar a cabo un análisis más exhaustivo y así tener más información sobre las soluciones a la hora de realizar la elección.

Para llevar a cabo esta propuesta, se modifica la función de evaluación de la versión estándar para que contemple la robustez como un objetivo más a optimizar. De este modo, el problema de optimización robusta de carteras se resuelve mediante algoritmos evolutivos con tres objetivos. Los dos primeros son los explicados en la sección 3.1: el rendimiento  $E(R_p)$  (ec. 3.2) a maximizar, y el riesgo  $\sigma_p$  (ec. 3.1) a minimizar.

El nuevo objetivo, denotado como  $Z_p$ , mide la estabilidad de una solución en particular evaluándola ante diferentes conjuntos de parámetros remuestreados. Minimizándolo, al mismo tiempo que se maximiza  $E(R_p)$  y minimiza  $\sigma_p$ , se consiguen no sólo carteras robustas, sino también adecuadas en términos de riesgo y rendimiento guardando, a su vez, buena relación entre los tres objetivos.  $Z_p$  se obtiene calculando la media de las distancias de Mahalanobis entre el par  $E(R_p)/\sigma_p$  de la cartera  $p$  (reflejada como  $\overline{x_p}$ ) y el riesgo/rendimiento esperados en  $G$  distintos escenarios factibles ( $\overline{x_{p1}}, \dots, \overline{x_{pG}}$ ). Formalmente se define en la siguiente ecuación 5.1:

$$Z_p = \frac{\sum_{i=1}^G [d_M(\overline{x_p}, \overline{x_{pi}})]^2}{G} \quad (5.1)$$

donde  $G$  es el número de escenarios remuestreados y  $d_M$  es la distancia de Mahalanobis definida en la ecuación 4.1.

Como  $\overline{x_p}$  se calcula para los parámetros estimados,  $d_M(\overline{x_p}, \overline{x_{pi}})$  devuelve la desviación de la cartera  $p$  cuando sus variables se evalúan en un escenario diferente. En cada generación del algoritmo evolutivo, se crean  $G$  nuevos grupos de parámetros que son usados para evaluar la estabilidad de los individuos que participan en el proceso evolutivo (tanto los nuevos como los antiguos). Cada nuevo escenario  $G$  es generado usando la técnica de *bootstrap* no paramétrico, de modo que los parámetros del conjunto original son remuestreados creando uno nuevo según se describe en la sección 3.5.1. Por tanto, el uso de diferentes escenarios en cada generación disminuye el riesgo

de generar uno que no difiera suficientemente de los parámetros estimados. Además, es muy importante que todos estos escenarios sean diferentes entre sí para poder medir los cambios bruscos que da una cartera al evaluarse en cada uno de ellos o, lo que es lo mismo, lo inestable que se muestra ante situaciones dispares. Asimismo, para penalizar especialmente las desviaciones, la distancia es elevada al cuadrado. Como es lógico, cuanto mayor sea el valor del objetivo  $Z_p$ , mayores desviaciones tendrá la cartera y, por lo tanto, menos estable será.

El algoritmo 11 muestra un esquema del MOEA básico con las modificaciones realizadas sobre el mismo para adaptar el enfoque diseñado. Los pasos 18-23 se corresponden con el procesamiento de frentes que se explica en la siguiente sección.

---

**Algorithm 11** MOEA básico + Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo

---

```

1: (Pasos específicos del MOEA)
2: Reparar mediante el alg. 7 al inicializar la población
3: for cada generación  $g$  do
4:   Generar  $G = 4$  nuevos conjuntos,  $S'_1...S'_4$ , mediante el alg. 9 a partir de  $S$ 
5:   (Pasos específicos del MOEA)
6:   Reparar después de aplicar los operadores genéticos (alg. 8) sobre los nuevos individuos
7:   for cada individuo existente  $p$  do
8:     if  $p$  es nuevo then
9:       Calcular  $E(R_p)$  sobre  $S$ 
10:      Calcular  $\sigma_p$  sobre  $S$ 
11:     end if
12:     Calcular  $Z_p$  sobre  $S'_1...S'_4$ 
13:   end for
14:   (Pasos específicos del MOEA)
15: end for
16: (Pasos específicos del MOEA)
17: MOEA devuelve el frente con soluciones no-dominadas  $P$ 
18: Dividir  $P$  en 3 frentes por estabilidades:  $P_a, P_m, P_b$ 
19: for cada subfrente  $P_i$  de  $P_a, P_m, P_b$  do
20:   Descartar el objetivo  $Z_p$ 
21:   Extraer los individuos no-dominados ( $P_{fi}$ ) de  $P_i$ 
22:   Devolver ( $P_{fi}$ )
23: end for

```

---

## 5.2. Procesamiento de los Frentes Resultado

El conjunto de frentes obtenido a partir de las distintas pruebas llevadas a cabo sobre la técnica de inclusión del tercer objetivo mostrada en este capítulo está formado por individuos no-dominados en función de los tres objetivos que han guiado el proceso evolutivo. La figura 5.1 muestra una solución escogida al azar del conjunto de experimentos que se usará como ejemplo ilustrativo para explicar el procesamiento de frentes al cual se refiere esta sección.

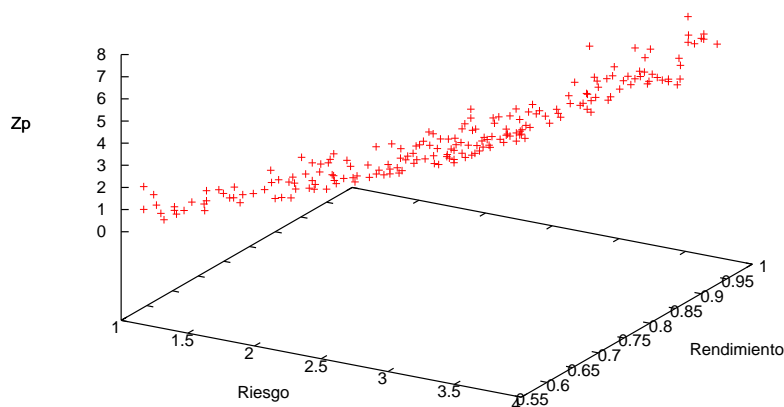


Figura 5.1: Ejemplo de frente con 3 objetivos usando SPEA2.

Como las soluciones con tres objetivos no son directamente comparables con aquellas obtenidas por la formulación estándar biobjetivo, cada uno de los frentes-resultado se divide en tres subconjuntos en función de  $Z_p$ , de menor a mayor valor, descartándose aquellos individuos que sean dominados en los dos objetivos básicos. Según lo expuesto, cada subconjunto contendrá un frente con carteras no-dominadas en términos de riesgo y rendimiento cuya calidad



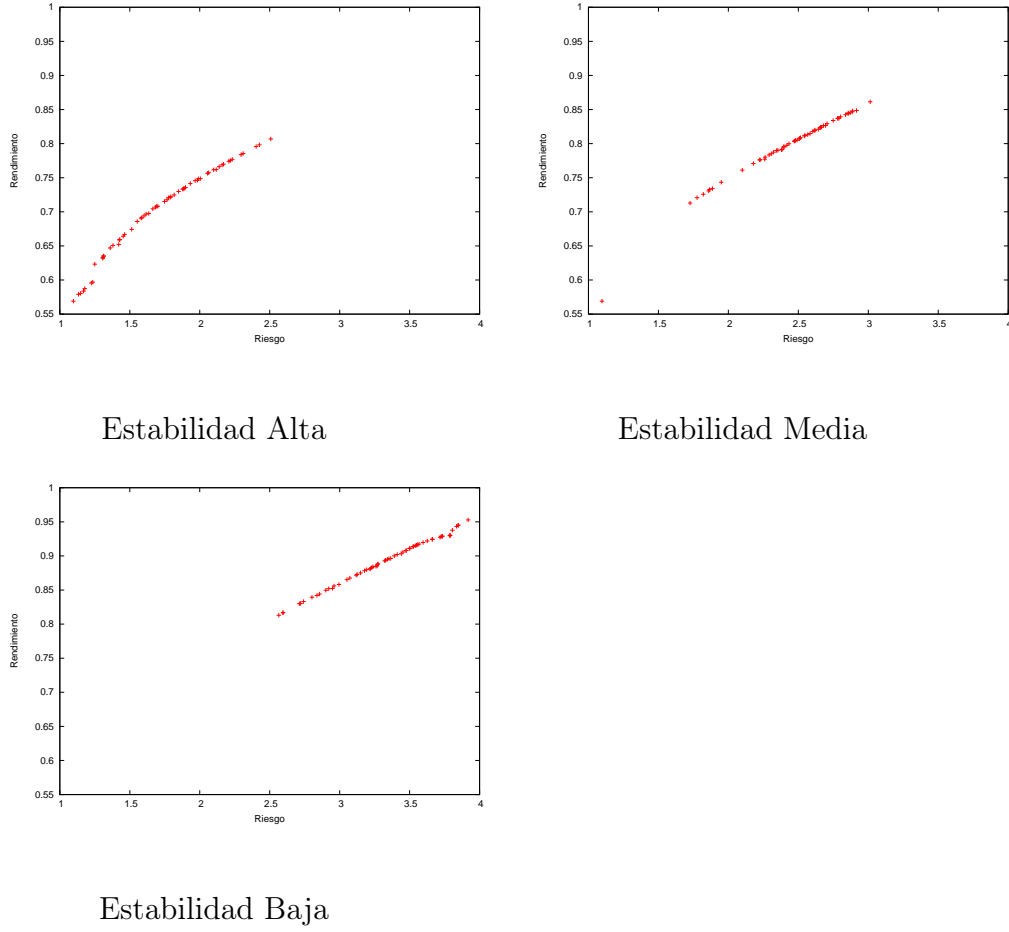


Figura 5.2: SPEA2. Ventana temporal del 31/05/1996 al 28/04/2006.

ya puede ser evaluada por las métricas descritas en 4.2. El procedimiento es el siguiente:

1. El frente final con los individuos no dominados en  $(E(R_p), \sigma_p, Z_p)$  es ordenado en función de  $Z_p$  y dividido en tres subfrentes por niveles de estabilidad (recordar que, según se explica en la sección anterior, cuanto menor sea  $Z_p$  más estable será la cartera):
  - Frente con **estabilidad alta**: primer tercio de individuos con menor valor de  $Z_p$ .
  - Frente con **estabilidad media**: se corresponde con el segundo

tercio de soluciones con menor valor de  $Z_p$ .

- Frente con **estabilidad baja**: se compone por el tercer tercio de carteras (tercio con mayor valor de  $Z_p$ ).

2. Por último, y para todos los individuos de cada subfrente, se descarta el tercer objetivo  $Z_p$  conservando únicamente las soluciones dominantes en función de sus dos objetivos, riesgo y rendimiento. Las gráficas de la figura 5.2 muestran los tres frentes resultantes del procesamiento del frente original mostrado en la fig. 5.1.

### 5.3. Selección de Parámetros

La utilidad de la técnica de optimización robusta propuesta en este capítulo se ha evaluado con tres algoritmos multiobjetivo diferentes. Concretamente, se han seleccionado NSGA-II y SPEA2 por ser dos de los MOEAs más conocidos y eficaces, así como SMPPO por estar basado en un enjambre de partículas (ver sección 2.1.3). Todos ellos comparten la misma estructura y codificación explicada en el capítulo 3, así como los componentes básicos principales ya definidos en el entorno de trabajo jMetal.

La tabla 5.1 muestra un resumen de los parámetros con los que se ha configurado la experimentación llevado a cabo. Se hicieron varias pruebas variando el tamaño de la población y el número de generaciones de los algoritmos aunque, al no aportar información adicional, no se muestran en este documento (sus resultados se pueden ver en el Apéndice B).

Se ha realizado un estudio variando el valor de  $G$  del cual se ha concluido que escoger un conjunto  $G = 4$  escenarios es suficientemente representativo para evaluar la estabilidad de un individuo. Con un valor superior a cuatro ( $G > 4$ ) aumentaba notablemente el tiempo de cómputo sin que la mayor variedad de escenarios contribuya sensiblemente a la mejora de la robustez. A su vez,  $G < 4$  no aportaba la heterogeneidad necesaria con lo que la robustez de las carteras resultantes se veía afectada negativamente.

Además, cada una de las tres metaheurísticas se ejecuta bajo las mismas restricciones de “cardinalidad” (se debe invertir, como mínimo, en dos activos

Tabla 5.1: Parámetros.  $L = 8$  (longitud del individuo).

Parámetros Comunes	
$N^{\circ}$ de generaciones	300
$C_{min}$	2
$C_{max}$	6
$lim_{inf}$	0.1
$lim_{sup}$	0.8
$G(Z_p)$	4
$S(TG)$	500
$Q(ER)$	100
$W(ER)$	0.05
$N^{\circ}$ de ejecuciones/ventana	20
SPEA2	
Tamaño de población	200 individuos
Tamaño del archivo	200 individuos
Cruce	SBX, $p_c = 0.9$
Mutación	Polynomial, $p_m = 1/L$
Selección	Binary tournament
NSGA-II	
Tamaño de población	200 individuos
Cruce	SBX, $p_c = 0.9$
Mutación	Polynomial, $p_m = 1/L$
Selección	Binary tournament
SMPSO	
Tamaño del archivo	200 partículas
Tamaño del enjambre	200 partículas
Mutación	Polynomial, $p_m = 1/L$

a la vez sin utilizar nunca más de seis) y de “valores límite” (la cantidad mínima de inversión por activo es del 10 % y la máxima del 80 % del capital) que debe cumplir cada cartera.

Con el fin de hacer comparables los resultados, toda la experimentación ha sido evaluada utilizando el indicador  $ER$  (ec. 5.5) con los mismos cinco conjuntos de parámetros más conflictivos ( $W = 5\%$ ) de los cien generados ( $Q = 100$ ). Además, se ha establecido un conjunto de  $S = 500$  escenarios para la aplicación del indicador de “Estabilidad” (ec. 5.3).

Cada uno de los algoritmos ha sido ejecutado 20 veces por cada desplazamiento de la ventana de modo que, si en cada configuración la ventana se mueve 120 veces, se obtienen 2.400 frentes con soluciones por cada metaheurística. Por lo tanto, los distintos datos sobre los indicadores de calidad mostrados en las tablas de la siguiente sección se han calculado sobre el

conjunto de los 2.400 frentes resultado.

Es importante destacar que, debido al uso de una ventana deslizante en la experimentación, el algoritmo de remuestreo empleado para generar los nuevos escenarios factibles tomará como conjunto original de parámetros  $S$  el grupo de periodos correspondientes a la ventana temporal sobre la cual esté operando el MOEA.

## 5.4. Resultados

En esta sección se exponen y analizan los resultados obtenidos con la configuración de experimentos mostrada, la cual ha sido probada con los tres algoritmos multiobjetivo mencionados: SPEA2, NSGA-II y SMPSO. Para cada uno de ellos se han evaluado tanto los frentes de las versiones estándar de los MOEAs (formulación del problema de optimización básico bi-objetivo adaptado al control de las restricciones propuestas, denotado por “Est”), como los de alta, media y baja estabilidad, usando los indicadores de calidad descritos en el capítulo 4.2. Las tablas 5.2-5.6 muestran las principales estadísticas descriptivas asociadas a las soluciones, mientras que la 5.7 y 5.8 presentan los resultados del protocolo descrito en la sección 4.3 para analizar si las diferencias son estadísticamente significativas. Además, se ha usado la técnica de ventana deslizante sobre el conjunto de datos elegido tal y como se explica en la sección 4.1.

La evaluación del indicador de “Error de Estimación” muestra el comportamiento esperado de los resultados, pues cuanto mayor es la estabilidad de las soluciones, menor es el valor de  $EE$ ; además, independientemente del algoritmo escogido, la mejora promedio en “Alta” es considerable. Los mayores beneficios se obtienen con los algoritmos genéticos NSGA-II y SPEA2, éstos se pueden explicar por el hecho de que parten de un error base elevado. Además, se puede observar como SMPSO parece comportarse mejor que el resto pues posee la mejor media, la segunda mejor mediana (cercana a la más baja obtenida por NSGA-II) y sus resultados son los más consistentes tal y como muestra su varianza (confirmado por los valores máximos y mí-

Tabla 5.2: Error de Estimación

EE	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	2.5198	1.7945	5.1421	10.2558	0.0082	
<b>SPEA2 Alta</b>	0.9387	0.6448	0.9844	6.6022	0.0081	<b>62.75 %</b>
SPEA2 Media	2.0338	1.5425	3.6269	10.0745	0.0032	19.29 %
SPEA2 Baja	4.1945	3.2386	16.4057	19.4953	0.0058	-66.46 %
NSGA-II Est	2.2823	1.7996	3.9817	10.1840	0.0178	
<b>NSGA-II Alta</b>	0.8557	0.5442	1.2544	12.9240	0.0055	<b>62.51 %</b>
NSGA-II Media	1.9449	1.4377	3.4238	10.5478	0.0035	14.78 %
NSGA-II Baja	4.4823	3.5236	18.2888	20.1793	0.0065	-96.40 %
SMPSO Est	1.5204	1.2878	1.7354	11.7968	0.0148	
<b>SMPSO Alta</b>	0.7660	0.5744	0.5298	4.7908	0.0025	<b>49.62 %</b>
SMPSO Media	1.2768	0.9673	1.3110	8.4644	0.0002	16.03 %
SMPSO Baja	2.4097	2.1001	4.2289	13.2070	0.0046	-58.48 %

minos). En este caso, la reducción media en el valor promedio de  $EE$  para todos los experimentos es de 49.62 %, lo cual indica que la diferencia entre el comportamiento esperado de las carteras seleccionadas y el observado en la realidad es significativamente menor en aquellas que han sido optimizadas con el método propuesto que en las optimizadas usando el enfoque estándar. El “Error de Estimación” del tercio menor de carteras estables es como cabía esperar, muy alto, siendo especialmente negativo para el caso del algoritmo NSGA-II. En este caso en concreto prácticamente se dobla el valor de su versión estándar.

El indicador de “Estabilidad” mide las desviaciones de las carteras al ser evaluadas en 500 escenarios factibles diferentes. Según se observa en la tabla 5.3, el método de incremento de robustez probado en este capítulo consigue los mejores resultados para el conjunto de frentes “Alta” obtenidos por el algoritmo NSGA-II. Incluso si la versión estándar de SMPSO proporciona frentes con mayor  $ST$  que la de NSGA-II, la inclusión de un tercer objetivo mejora el comportamiento de este último en un 62.47 % hasta situarlo como el algoritmo que facilita en su versión más estable (“Alta”) la menor media, mediana, varianza, máximo y mínimo de los tres. Sin embargo, este hecho no se aprecia en el caso de los frentes “Media” ya que la mejora mediante

Tabla 5.3: Estabilidad

ST	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	7.4057	7.0743	20.7329	33.7457	2.1059	
<b>SPEA2 Alta</b>	3.0420	2.8746	3.9186	28.1464	0.6596	<b>58.92 %</b>
SPEA2 Media	6.4575	6.1762	16.9193	37.8057	1.7638	12.80 %
SPEA2 Baja	11.9334	11.2489	54.5752	60.2639	1.5608	-61.14 %
NSGA-II Est	6.5508	6.1640	12.9661	26.3581	2.1452	
<b>NSGA-II Alta</b>	2.4584	2.1841	2.6288	19.9289	0.5778	<b>62.47 %</b>
NSGA-II Media	5.9243	5.4582	10.1646	25.2901	1.8030	9.56 %
NSGA-II Baja	4.5813	3.4372	16.4506	58.1568	0.7066	-31.38 %
SMPSO Est	5.2373	4.8981	7.2544	17.6850	0.7992	
<b>SMPSO Alta</b>	2.9181	2.7938	2.7653	13.0188	0.3098	<b>44.28 %</b>
SMPSO Media	4.7198	4.5280	6.5346	17.0985	0.3544	9.88 %
SMPSO Baja	7.6971	7.2334	15.6828	26.5307	0.7757	-46.97 %

NSGA-II (9.56 %) y SMPSO (9.90 %) es parecida y, por lo tanto, las carteras obtenidas por el segundo algoritmo siguen siendo más estables. Se aprecia como los frentes correspondientes al tercio “Baja” son visiblemente peores que el resto de los conjuntos.

La tabla 5.4 muestra el conjunto de resultados correspondientes al indicador de “Rendimientos Inesperados”, los cuales se comportan de manera similar a los mostrados en la tabla 5.2. Se puede ver cómo el valor medio de  $UR$  disminuye notablemente en los frentes con mayor estabilidad observándose una gran diferencia con respecto a las carteras de estabilidad media. De nuevo, SMPSO es el algoritmo que mejor se comporta; incluso si las versiones estándar de SPEA2 y NSGA-II tienden a mostrar mayores valores de  $UR$  que SMPSO, la mejoría en términos de robustez es relativamente similar entre ellas. Los beneficios obtenidos al seleccionar las carteras con mayor estabilidad van de 33.32 % a 35.72 % mientras que en el caso de elegir aquellas con estabilidad media se reduce del 33.40 % al 9.9 % en el mejor de los casos (con SMPSO) y desde el 35.70 % al 3.64 % para NSGA-II. Es lógico observar cómo aquellas soluciones con baja estabilidad son menos robustas que el resto ante rendimientos inesperados.

Los valores del indicador de “Riesgo Extremo” son consistentes. La selec-

Tabla 5.4: Rendimientos Inesperados

UR	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	3.5848	2.7989	8.5604	17.1760	0.1589	
<b>SPEA2 Alta</b>	2.3903	1.9530	2.8606	13.2710	0.1416	<b>33.32 %</b>
SPEA2 Media	3.3552	2.6677	7.6028	17.8537	0.1500	6.40 %
SPEA2 Baja	4.3958	3.3277	14.7493	22.3592	0.0856	-22.62 %
NSGA-II Est	3.4871	2.7326	7.8823	17.3582	0.1690	
<b>NSGA-II Alta</b>	2.2413	1.8409	2.2544	10.6061	0.1727	<b>35.72 %</b>
NSGA-II Media	3.3600	2.6389	7.6546	18.0458	0.1597	3.64 %
NSGA-II Baja	4.5813	3.4372	16.4506	23.8853	0.0932	-31.38 %
SMPSO Est	2.9805	2.4745	4.9961	13.0572	0.1298	
<b>SMPSO Alta</b>	1.9837	1.6159	1.9944	13.0905	0.1424	<b>33.44 %</b>
SMPSO Media	2.6855	2.2980	4.1098	13.2112	0.1041	9.90 %
SMPSO Baja	3.7202	3.0062	8.1424	16.1472	0.1422	-24.82 %

ción de los cinco peores escenarios sobre un conjunto de cien factibles por periodo de tiempo mejora, de forma generalizada, los errores de predicción (cuya distribución es parecida a la obtenida por *EE*). La tabla 5.5 muestra cómo el objetivo adicional de robustez reduce significativamente la media hasta un 57.93 % en el mejor de los casos. Una vez más, las soluciones basadas en el enjambre de partículas, tanto la versión estándar como la estable, aportan las mejores medias y una mayor consistencia. Merece la pena mencionar que la mediana del caso estable con NSGA-II es ligeramente inferior a la de SMPSO en las mismas condiciones, hecho que penaliza la varianza del primero siendo ésta más del doble. Sin embargo, el comportamiento de los frentes con estabilidad media no es el mismo pues la superioridad de SMPSO sobre el resto de algoritmos genéticos multiobjetivo es evidente, independientemente de la estadística considerada. Como era de esperar, con este indicador de calidad las soluciones poco estables presentan valores muy malos; en cambio, se aprecia que el *UR* de SMPSO en “Baja” es inferior al de “SPEA2 Est” tanto en el caso de la media como en el de la mediana, resultado completamente inesperado.

Con intención de valorar el comportamiento del riesgo y rendimiento, se estudian la distancias euclídeas de ambos objetivos por separado. Es lógico

Tabla 5.5: Riesgo Extremo

ER	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	3.5308	3.0614	4.9670	10.7373	0.4353	
<b>SPEA2 Alta</b>	1.5177	1.2593	1.1936	6.9312	0.1178	<b>57.02 %</b>
SPEA2 Media	2.9764	2.5328	3.6940	10.1794	0.2404	15.70 %
SPEA2 Baja	5.6684	4.6919	15.8470	20.9767	0.5269	-60.54 %
NSGA-II Est	3.2407	2.8451	3.9687	10.7281	0.4180	
<b>NSGA-II Alta</b>	1.3633	1.0087	1.4098	12.8027	0.1471	<b>57.93 %</b>
NSGA-II Media	2.8657	2.4719	3.5085	10.7960	0.2177	11.57 %
NSGA-II Baja	6.0523	5.0495	17.8200	20.6084	0.2508	-86.76 %
SMPSO Est	2.2485	2.0297	1.8884	11.9282	0.1659	
<b>SMPSO Alta</b>	1.2384	1.0332	0.6596	6.9722	0.0680	<b>44.92 %</b>
SMPSO Media	1.9356	1.7212	1.5613	8.2008	0.0720	13.92 %
SMPSO Baja	3.4179	3.0564	4.9731	13.3684	0.2328	-52.01 %

que el porcentaje de mejora sobre la media de cada uno de los conjuntos evaluados sea inferior al dado por el indicador de  $EE$  ya que éste último agranda las distancias entre carteras enfatizando así sus desviaciones. En este caso, el comportamiento de los resultados según  $ED_{E(R)}$  es similar a  $ED_{\sigma^2}$  y a  $ST$ . Ambos indicadores de la tabla 5.6 muestran como la versión más estable de NSGA-II es la que menos desviaciones presenta en sus carteras respecto a los parámetros reales, incluso si SMPSO en su versión más básica genera frentes más robustos. Las mejoras en la media varían de un 31.82 % a un 44.62 % en el rendimiento, y de 30.57 % a 45.28 % en el riesgo con SMPSO y NSGA-II respectivamente. Al igual que con  $ST$ , SMPSO genera frentes de estabilidad media con menor  $ED$  que el resto de algoritmos pero, como con su versión estándar ocurre lo mismo, SPEA2 resulta ser el MOEA que consigue mayor beneficio, un 10.45 %, sobre el algoritmo base.

Otro detalle a tener en consideración es que la elección del algoritmo multiobjetivo donde adaptar la técnica robusta afecta a las soluciones. De las tres alternativas consideradas (NSGA-II, SPEA2 y SMPSO), las dos primeras se comportan de manera parecida mientras que la última localiza carteras más robustas. Además se observa que, dependiendo del nivel de estabilidad escogido, sus carteras correspondientes tienden a situarse en una zona concreta



Tabla 5.6: Distancias Euclídeas

$ED_{E(R)}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	2.8711	2.1098	7.2119	20.6422	0.1095	
<b>SPEA2 Alta</b>	1.6710	1.2462	2.5006	15.7735	0.0834	<b>41.80 %</b>
SPEA2 Media	2.5869	1.8897	6.4271	21.3926	0.0537	9.90 %
SPEA2 Baja	3.6721	2.7707	12.1525	26.1758	0.0654	-27.90 %
NSGA-II Est	2.7437	2.0486	6.4505	19.7771	0.1280	
<b>NSGA-II Alta</b>	1.5194	1.1481	1.9613	12.8948	0.0626	<b>44.62 %</b>
NSGA-II Media	2.5373	1.8238	6.2432	20.6046	0.0690	7.53 %
NSGA-II Baja	3.8095	2.9033	13.0680	26.6529	0.0606	-38.84 %
SMPSO Est	2.3546	1.6358	5.3207	17.5193	0.0947	
<b>SMPSO Alta</b>	1.6053	1.1756	2.6385	17.9757	0.0612	<b>31.82 %</b>
SMPSO Media	2.1380	1.4850	4.7909	17.5738	0.0369	9.20 %
SMPSO Baja	2.9498	2.1872	7.9665	21.2183	0.0526	-25.28 %
$ED_{\sigma^2}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	0.0208	0.0103	0.0020	0.4745	0.0016	
<b>SPEA2 Alta</b>	0.0121	0.0063	0.0009	0.3840	0.0007	<b>41.93 %</b>
SPEA2 Media	0.0186	0.0095	0.0021	0.5130	0.0008	10.45 %
SPEA2 Baja	0.0259	0.0128	0.0030	0.5789	0.0007	-24.97 %
NSGA-II Est	0.0199	0.0097	0.0019	0.4559	0.0017	
<b>NSGA-II Alta</b>	0.0109	0.0056	0.0006	0.3091	0.0007	<b>45.28 %</b>
NSGA-II Media	0.0183	0.0093	0.0020	0.4953	0.0006	7.89 %
NSGA-II Baja	0.0270	0.0133	0.0033	0.5786	0.0009	-36.04 %
SMPSO Est	0.0172	0.0085	0.0016	0.4261	0.0012	
<b>SMPSO Alta</b>	0.0119	0.0065	0.0010	0.4276	0.0005	<b>30.57 %</b>
SMPSO Media	0.0157	0.0078	0.0016	0.4975	0.0010	9.05 %
SMPSO Baja	0.0211	0.0105	0.0023	0.4322	0.0004	-22.86 %

de la frontera eficiente (este efecto se puede apreciar en la figura 5.2).

Con el objetivo de facilitar la visualización de los resultados, éstos se comparan gráficamente mediante los diagramas de barras de la figura 5.3. Por tanto, en función de estas gráficas y sus correspondientes resultados mostrados en las tablas 5.2-5.6, la inclusión de un tercer objetivo para guiar el proceso de evolución aumenta la robustez de las soluciones independientemente del algoritmo escogido. La mejora más acentuada sobre la versión estándar de los MOEAs se da para el conjunto de frentes correspondientes con el primer tercio superior de estabilidad; de igual modo se aprecian algunas mejoras en las carteras con estabilidad media mientras que, como se

Tabla 5.7: Test Estadísticos. Iguales para EE, ST, ER, ED-rendimiento y ED-riesgo.

EE, ST, ER, ED	SPEA2	NSGA-II	SMPSO
<b>Alta / Est</b>	--	--	--
<b>Media / Est</b>	--	--	--
<b>Baja / Est</b>	++	++	++
<b>Alta / Media</b>	--	--	--
<b>Media / Baja</b>	--	--	--
<b>Alta / Baja</b>	--	--	--

Tabla 5.8: Test Estadísticos. Rendimientos Inesperados.

UR	SPEA2	NSGA-II	SMPSO
<b>Alta / Est</b>	--	--	--
<b>Media / Est</b>	--	-	--
<b>Baja / Est</b>	++	++	++
<b>Alta / Media</b>	--	--	--
<b>Media / Baja</b>	--	--	--
<b>Alta / Baja</b>	--	--	--

preveía, las soluciones del tercio con menor estabilidad son extremadamente pobres. Corroborando este comportamiento, la tablas 5.7 y 5.8 muestran que, para todos los indicadores de calidad y algoritmos probados, los frentes con alta estabilidad son mejores que cualquier otro conjunto de frentes a niveles convencionales del 1 %. Este hecho también ocurre en los conjuntos de estabilidad media con respecto a la baja o incluso a la versión estándar. De igual modo, se confirma que las soluciones correspondientes al tercio de carteras menos estables son significativamente peores que el resto con una diferencia del 1 %. Sólo existe una excepción, mostrada en la tabla 5.8, para el indicador de “Rendimientos Inesperados” al comparar las soluciones de estabilidad media con el algoritmo estándar, ya que las primeras son mejores con una diferencia significativa del 5 %.

En resumen, el proceso experimental ha abarcado veinte años de datos de ocho amplios índices financieros y tres algoritmos evolutivos multiobjetivo, en donde los resultados muestran que la inclusión de un tercer objetivo que

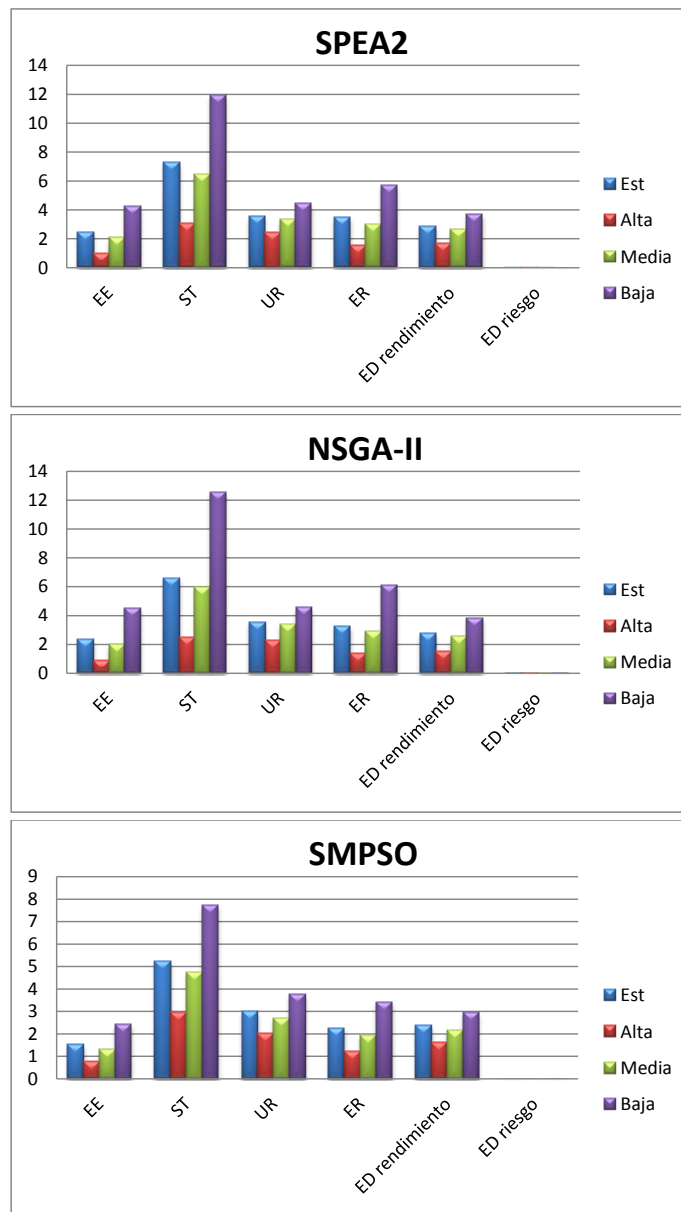


Figura 5.3: Comparación de resultados entre “Est”, “Alta”, “Media” y “Baja”.

tenga en cuenta la estabilidad en las soluciones está estrechamente relacionado con la robustez. Independientemente del MOEA escogido, este tercer objetivo ha permitido identificar aquellas carteras que son más fiables que las provistas por las versiones estándar de los algoritmos. Los resultados son consistentes pues los frentes con alta estabilidad son más robustos que aque-

llos con estabilidad media, los cuales a su vez son más fiables que los de baja estabilidad; además este hecho ocurre con todos los indicadores y MOEAs.

## Capítulo 6

# Método de Evaluación con Remuestreo

En este capítulo se presenta el segundo método propuesto en esta tesis para incrementar la robustez de las carteras. Tras describir su función de evaluación, se muestra la configuración de parámetros para la experimentación llevada a cabo con esta técnica, de la cual se estudian sus resultados en la última sección.

### 6.1. Descripción y Función de Fitness

La adaptación planteada en el capítulo anterior alcanza grandes beneficios en términos de robustez con respecto al caso base. Sin embargo, el hecho de escoger carteras por estabildades hace que el conjunto resultante tan sólo contenga aproximadamente un tercio de las soluciones pertenecientes a la frontera eficiente; además, dependiendo de su nivel de estabilidad, estas carteras tienden a situarse en una zona concreta del frente (ver figura 5.2). Debido a que las preferencias de los inversores varían en función de sus necesidades, puede ocurrir que a éstos no sólo les interese conseguir carteras muy robustas, si no que también aporten un alto rendimiento aunque para ello tengan que empeorar en estabilidad y riesgo. De igual manera puede ser conveniente que el número de opciones ofrecidas sea el mayor posible y que

éstas, a su vez, sean variadas.

Con el fin de intentar solucionar las desventajas mencionadas, se desarrolla una nueva técnica que, en lugar de controlar la robustez mediante la inclusión de un tercer objetivo que mida esta propiedad en los individuos, mantiene el riesgo y el rendimiento como objetivos haciendo implícito el control de la robustez. Además, como es probable que las estimaciones a partir de los parámetros originales se acerquen más a la realidad que las extraídas de los escenarios remuestreados, la nueva adaptación planteada evalúa el frente resultante del proceso evolutivo sobre el conjunto original de parámetros devolviendo aquéllos que no estén dominados bajo los mismos.

Su función de fitness se diferencia de la que resuelve el problema estándar bi-objetivo en que, en lugar de calcular el riesgo y rendimiento de las carteras sobre el conjunto de parámetros estimado, crea un nuevo escenario factible en cada generación del proceso evolutivo y lo emplea para evaluar los nuevos individuos.

---

**Algorithm 12** MOEA básico + Método de Evaluación con Remuestreo

---

```

1: (Pasos específicos del MOEA)
2: Reparar mediante el alg. 7 al inicializar la población
3: for cada generación  $g$  do
4:   A partir de  $S$ , el alg. 9 genera un nuevo conjunto  $S'_g$ 
5:   (Pasos específicos del MOEA)
6:   Reparar (alg. 8) después de aplicar los operadores genéticos sobre los nuevos individuos
7:   for cada nuevo individuo  $p$  do
8:     Calcular  $E(R_p)$  sobre  $S'_g$ 
9:     Calcular  $\sigma_p$  sobre  $S'_g$ 
10:  end for
11:  (Pasos específicos del MOEA)
12: end for
13: (Pasos específicos del MOEA)
14: MOEA devuelve el frente con soluciones no-dominadas  $P$ 
15: Calcular los parámetros estimados de  $S$  (conjunto original)
16: for cada individuo  $p$  de  $P$  do
17:   Calcular  $E(R_p)$  sobre  $S$ 
18:   Calcular  $\sigma_p$  sobre  $S$ 
19: end for
20: Extraer los individuos no-dominados ( $P_f$ ) de  $P$ 
21: Devolver ( $P_f$ )

```

---

El punto de partida para la evaluación de las carteras se resuelve mediante

el cálculo del riesgo  $\sigma_p$  (definido en la ecuación 3.1) que se debe minimizar al mismo tiempo que se maximiza el rendimiento  $E(R_p)$  (ec. 3.2). El algoritmo 12 muestra el MOEA estándar más las modificaciones sobre él aplicadas por el método de evaluación con remuestreo desarrollado en este capítulo. Este enfoque se caracteriza por:

- En cada generación  $g$  se crea un nuevo escenario  $S'_g$  mediante el proceso descrito en la sección 3.5.1, el cual utiliza un mecanismo de *bootstrap* no paramétrico que remuestrea los parámetros del conjunto original para crear uno nuevo (paso 4).
- Los nuevos individuos se evalúan sobre el escenario  $S'_g$  correspondiente a su generación ( $g$ ) y no se vuelven a evaluar hasta el final del algoritmo (pasos 7-10).
- Un vez acabado el proceso evolutivo, cada individuo perteneciente al frente final calcula su par de objetivos  $(E(R_p), \sigma_p)$  sobre las estimaciones originales de los parámetros no remuestreados descartando aquellas soluciones que pasen a ser dominadas en términos de riesgo y rendimiento (pasos 15-20).

Por lo tanto, diferentes individuos son evaluados ante distintos escenarios a lo largo del proceso evolutivo evitando así que las soluciones se sobrespecialicen en un único conjunto de parámetros que puede acercarse o no a la realidad. De este modo, se generan carteras más robustas ante posibles desviaciones en las estimaciones.

## 6.2. Selección de Parámetros

Puesto que los métodos de optimización multiobjetivo son adecuados para la resolución de este tipo de problemas, la técnica presentada en este capítulo se ha probado en diferentes MOEAs que comparten la misma estructura, codificación del cromosoma, etc. descritas en el capítulo 3.

Se han seleccionado cuatro algoritmos evolutivos multiobjetivo, tres de ellos ya utilizados en el capítulo anterior, descritos en la sección 2.1.3. Con

la idea de probar el método robusto en diferentes tipos de MOEAs, se han elegido dos algoritmos genéticos (NSGA-II y SPEA2), uno basado en un enjambre de partículas (SMPSO) y una estrategia de evolución generalizada diferencial (GDE3).

Tabla 6.1: Parámetros.  $L = 8$  (longitud del individuo).

Parámetros Comunes	
$N^{\circ}$ de generaciones	100
$C_{min}$	2
$C_{max}$	6
$lim_{inf}$	0.1
$lim_{sup}$	0.8
$S(TG)$	500
$Q(ER)$	100
$W(ER)$	0.05
$N^{\circ}$ de ejecuciones/ventana	20
SPEA2	
Tamaño de población	200 individuos
Tamaño del archivo	200 individuos
Cruce	SBX, $p_c = 0.9$
Mutación	Polynomial, $p_m = 1/L$
Selección	Binary tournament
NSGA-II	
Tamaño de población	200 individuos
Cruce	SBX, $p_c = 0.9$
Mutación	Polynomial, $p_m = 1/L$
Selección	Binary tournament
SMPSO	
Tamaño del archivo	200 partículas
Tamaño del enjambre	200 partículas
Mutación	Polynomial, $p_m = 1/L$
GDE3	
Variante	rand/1/bin
Tamaño de población	200 individuos
Cruce	DE crossover, $p_c = 0.9$ , $F = 0.5$
Selección	DE selection

La configuración de los experimentos de la siguiente sección se muestra en la tabla 6.1. Con el fin de hacer lo más comparables posible los tres enfoques robustos desarrollados en esta tesis doctoral, se establecen unos parámetros de configuración similares a los del capítulo anterior (mostrados en la sección 5.3) sólo que, en este caso, se ha añadido la configuración de GDE3 en donde  $F$  es un parámetro propio del cruce y  $p_c$  su probabilidad. Además, la técnica



de incremento de robustez aquí presentada se ejecuta un número diferente de generaciones que el resto de los métodos probados en los capítulos 5 y 7. La razón es que de un primer trabajo experimental exploratorio se dedujo que emplear cien generaciones en los MOEAs con la técnica de remuestreo aquí estudiada es suficiente para conseguir carteras adecuadas; es más, un aumento de iteraciones no mejoraría su comportamiento pero sí incrementaría su coste computacional. Con la intención de hacer lo más comparable posible las dos versiones de los algoritmos, se ha llevado a cabo experimentación adicional en la que se han ejecutado de nuevo los cuatro MOEAs estándar bajo los mismos parámetros, a excepción del número de generaciones que se ha disminuido de 300 a 100. Como se ha comentado previamente, esta disminución no afecta negativamente a los resultados pues se mantienen similares a sus análogos.

Se recuerda que debido al uso de una ventana deslizante en la experimentación, el algoritmo 9 de remuestreo (empleado para generar los nuevos escenarios factibles) tomará como grupo original de parámetros  $S$  el conjunto de periodos correspondientes a la ventana temporal sobre la cual esté operando el MOEA.

### 6.3. Resultados

Como se ha expuesto previamente, se han llevado a cabo experimentos exploratorios variando la configuración de los parámetros tales como el número de generaciones, tamaño de población, tamaño de ventana, etc. Los resultados más significativos se pueden consultar en esta sección, mientras que el resto se encuentran recogidos en el Apéndice B.

En esta sección se compara, para cada uno de los MOEAs utilizados, el comportamiento de su versión estándar bi-objetivo (etiquetada como “Est”) frente a su versión robusta (denotada con una “R”) desarrollada en este capítulo. Las tablas 6.2-6.6 muestran las estadísticas sobre las métricas utilizadas para evaluar los resultados cuyos contrastes se plasman en la tabla 6.7. Recordar también que la ventana deslizante utilizada se ha desplazado un total de 120 veces.

Tabla 6.2: Error de Estimación

EE	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	2.4668	1.7464	4.9672	10.2145	0.0075	
SPEA2 R	1.5221	1.0081	2.1856	11.5692	0.0057	38.30 %
NSGA-II Est	2.2854	1.8301	3.9980	10.2756	0.0141	
NSGA-II R	1.7138	1.1955	2.5694	11.4063	0.0177	25.01 %
SMPSO Est	1.5091	1.2918	1.6319	8.5800	0.0228	
SMPSO R	1.2058	0.9662	0.9420	8.7270	0.0069	20.09 %
GDE3 Est	1.4892	1.2378	1.6268	8.5680	0.0199	
GDE3 R	<b>1.1787</b>	0.9453	0.9367	7.6361	0.0013	20.85 %

La tabla 6.2 muestra la evaluación de resultados utilizando la métrica de “Error de Estimación” que mide la distancia entre las carteras evaluadas bajo los parámetros estimados y las mismas cuyos objetivos se han calculado sobre el escenario observado. La ventaja en términos de  $EE$  de usar esta nueva técnica varía entre el 20.09 % (en el caso de SMPSO) y el 38.3 % (para SPEA2); las mayores mejoras medias provienen de los algoritmos genéticos NSGA-II y SPEA2 debido a que parten de un error base elevado. En general, los resultados muestran que en todos los casos las versiones robustas de los algoritmos reducen notablemente las desviaciones de sus soluciones una vez se evalúan sobre los parámetros observados. GDE3 es el algoritmo que aporta más robustez a las carteras en términos de esta métrica; además su versión estándar es la que posee menor  $EE$  y, a pesar de no ser el que más beneficio proporciona, tanto su mediana como su varianza sugieren que su versión remuestreada sigue siendo preferible al resto. En cambio, es destacable cómo “NSGA-II R” ofrece un mayor error de estimación que las versiones básicas de GDE3 y SMPSO.

El segundo indicador de calidad empleado para evaluar las carteras es mostrado en la tabla 6.3. “Estabilidad” mide las desviaciones de las carteras al ser enfrentadas a muchos escenarios factibles o, lo que es lo mismo, su estabilidad ante diferentes situaciones. Se puede apreciar cómo la técnica robusta genera soluciones desde un 19.81 % (empleando GDE3) hasta un 44.65 % (con SPEA2) más estables que las versiones estándar de los MOEAs. Tanto SMPSO como GDE3 presentan niveles de estabilidad parecidos, con-

Tabla 6.3: Estabilidad

ST	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	7.2633	6.8820	19.4287	32.0934	2.1843	
SPEA2 R	<b>4.0202</b>	3.6067	4.2611	17.6843	0.4218	44.65 %
NSGA-II Est	6.5535	6.1696	12.8114	27.1640	2.0893	
NSGA-II R	4.6390	4.1034	5.6729	20.7454	0.4378	29.21 %
SMPSO Est	5.2340	4.9400	7.1849	18.8526	0.5710	
SMPSO R	4.1290	3.6290	4.4897	16.1698	0.3137	21.11 %
GDE3 Est	5.1699	4.8575	6.8319	16.7544	0.6069	
GDE3 R	4.1460	3.6254	5.2572	16.5886	0.4108	19.81 %

cretamente el primero posee menor varianza (así como máximo y mínimo) que el segundo, aunque sus medianas sean parecidas. Llama la atención que tanto SPEA2 como NSGA-II parten con valores de estabilidad elevados; sin embargo, sus varianzas disminuyen notablemente cuando se evalúa su versión robusta. Además, es interesante resaltar que “SPEA2 R” consigue frentes más estables que el resto de MOEAs a pesar de ser el algoritmo estándar con los peores valores de  $ST$ . Tanto su estabilidad media, como su varianza y mediana son las mejores y, por tanto, es lógico que sea el MOEA que más incremente la robustez de su versión básica.

Tabla 6.4: Rendimientos Inesperados

UR	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	3.5553	2.7625	8.4599	17.1028	0.1694	
SPEA2 R	2.9135	2.2796	4.8969	15.4425	0.1809	18.05 %
NSGA-II Est	3.4914	2.7342	7.8726	17.2775	0.1654	
NSGA-II R	3.1227	2.4039	5.8476	17.4419	0.1781	10.56 %
SMPSO Est	3.0043	2.4931	5.0551	13.3114	0.1281	
SMPSO R	<b>2.6159</b>	2.1228	3.6643	12.7245	0.0859	12.93 %
GDE3 Est	3.3476	2.8917	5.6708	15.7704	0.2755	
GDE3 R	2.9243	2.4800	4.1598	13.8645	0.2122	12.64 %

La tabla 6.4 muestra el conjunto de resultados correspondientes al indicador de “Rendimientos Inesperados”, el cual mide la media del rendimiento que faltaría para alcanzar el máximo que se puede llegar a obtener en función de los parámetros observados. En general, las versiones robustas de los

algoritmos mejoran a las básicas del 10.56 % al 18.05 %. La versión robusta de SMPSO es la que genera carteras con menos rendimientos inesperados poseyendo una media, mediana, varianza e intervalos de máximo-mínimo inferiores al resto. De nuevo, el método NSGA-II es el que mayor  $UR$  genera de todos los MOEAs sea cual sea el enfoque evaluado. Es interesante resaltar que SPEA2 y GDE3 con remuestreo tienen una media de  $UR$  parecida a pesar de que “SPEA2 Est” parte con un valor más elevado, en cambio la varianza de éste último es superior.

Tabla 6.5: Riesgo Extremo

ER	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	3.4718	3.0343	4.8182	10.6668	0.4300	
SPEA2 R	2.1794	1.7312	2.3263	11.2774	0.3285	37.23 %
NSGA-II Est	3.2458	2.8777	3.9702	10.8183	0.4192	
NSGA-II R	2.4399	1.9757	2.7687	11.0897	0.3094	24.83 %
SMPSO Est	2.2428	2.0070	1.7954	8.7545	0.2403	
SMPSO R	1.7599	1.4952	1.1266	8.9409	0.2342	21.53 %
GDE3 Est	2.2134	1.9751	1.8009	8.3695	0.2418	
GDE3 R	<b>1.7167</b>	1.4750	1.0911	7.8984	0.2591	22.44 %

El cuarto indicador empleado para evaluar las soluciones es el “Riesgo Extremo” cuyos resultados son mostrados en la tabla 6.5. Como es de esperar, la versión remuestreada de los algoritmos disminuye un 37.23 % el valor medio de  $ER$  en el mejor de los casos. A diferencia de las situaciones anteriores, GDE3 es el algoritmo con menor  $ER$  y, aunque supera a SMPSO en todas las medidas estadísticas, sus valores son similares. Al igual que en  $EE$ , las mayores mejoras medias provienen de los algoritmos genéticos NSGA-II y SPEA2 ya que parten de un error base elevado; sin embargo, éstas no son suficientes para que sus carteras sean las más adecuadas pues sus varianzas son las más elevadas. Cabe destacar que, hasta ahora, la técnica de remuestreo probada en este capítulo parece ser más eficiente en SPEA2 que en NSGA-II.

El último indicador empleado para evaluar los resultados es la “Distancia Euclídea”, la cual mide por separado la distancia del rendimiento y la del riesgo, ambas mostradas en la tabla 6.6. Aunque  $ED_{E(R)}$  y  $ED_{\sigma^2}$  se comporten de forma muy parecida, sus variaciones son más importantes en el primero.

Tabla 6.6: Distancias Euclídeas

$ED_{E(R)}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	2.8437	2.0931	7.1251	20.5707	0.1034	
SPEA2 R	2.2237	1.5983	4.4847	18.6563	0.1437	21.80 %
NSGA-II Est	2.7445	2.0576	6.4205	19.6901	0.1297	
NSGA-II R	2.3918	1.6873	5.0662	19.8284	0.1129	12.85 %
SMPSO Est	2.3467	1.6238	5.2468	18.1739	0.1020	
SMPSO R	2.1204	1.5295	4.0787	17.5665	0.0705	9.64 %
GDE3 Est	2.3275	1.6171	5.2074	17.6540	0.0991	
GDE3 R	<b>2.0867</b>	1.5085	4.0808	17.3964	0.0411	10.35 %
$ED_{\sigma^2}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	0.0206	0.0103	0.0020	0.4733	0.0016	
SPEA2 R	0.0161	0.0075	0.0013	0.4110	0.0010	21.46 %
NSGA-II Est	0.0198	0.0097	0.0018	0.4540	0.0017	
NSGA-II R	0.0173	0.0080	0.0014	0.4304	0.0010	12.64 %
SMPSO Est	0.0172	0.0085	0.0016	0.4413	0.0013	
SMPSO R	0.0154	0.0076	0.0013	0.4414	0.0009	10.10 %
GDE3 Est	0.0171	0.0084	0.0016	0.4292	0.0011	
GDE3 R	<b>0.0152</b>	0.0075	0.0014	0.4154	9.6e-05	10.95 %

Se puede ver como la ventaja de usar la técnica con remuestreo varía de un 9.64 % a un 21.8 % en rendimiento y de un 10.10 % a un 21.46 % en riesgo (en SMPSO y SPEA2 respectivamente para ambas medidas). Al igual que con  $ER$ , GDE3 parece ser mejor que los demás en su configuración estándar aunque estas diferencias resultan menos evidentes cuando se evalúa “R”. SMPSO ofrece resultados próximos a GDE3 (con una varianza muy similar) aunque la distancia media de su versión remuestreada sigue siendo superior. Los dos algoritmos genéticos, a pesar de ser los más beneficiados por la técnica de remuestreo, siguen generando frentes más lejanos a la realidad. Por último merece la pena destacar que, como ocurre con el indicador de “Error de Estimación”, la versión robusta de NSGA-II presenta distancias euclídeas mayores que las versiones básicas de GDE3 y SMPSO.

Para completar las tablas anteriores, también se ha llevado a cabo el protocolo de contraste descrito por el alg. 10 sobre todas las soluciones obtenidas y evaluadas por los indicadores de calidad. Sus valores muestran en la tabla 6.7 que en todos los casos existe una diferencia significativa al 1 % (-) en-

tre la versión robusta y la estándar de cada uno de los cuatro algoritmos empleados.

Tabla 6.7: Test Estadísticos de los indicadores de calidad.

	<b>EE</b>	<b>ST</b>	<b>ER</b>	<b>UR</b>	<b>ED <math>E(R)</math></b>	<b>ED <math>\sigma^2</math></b>
<b>SPEA2 R / SPEA2 Est</b>	--	--	--	--	--	--
<b>NSGA-II R / NSGA-II Est</b>	--	--	--	--	--	--
<b>SMPSO R / SMPSO Est</b>	--	--	--	--	--	--
<b>GDE3 R / GDE3 Est</b>	--	--	--	--	--	--

Existe una explicación potencial para la ganancia de robustez relativa de la versión robusta de SPEA2 y NSGA-II con respecto a la estándar. De la inspección de una muestra de fronteras eficientes tomadas a partir de distintos experimentos, se deduce que ambos algoritmos genéticos tienden a facilitar frentes que son un poco más extensos en su parte superior (la cual representa los valores más altos de rendimiento y de riesgo) que los proporcionados por el resto de algoritmos estándar. Por tanto, debido a que las carteras situadas en esa sección del frente son más propensas a sufrir grandes desviaciones, la robustez base empeora. En cambio, la versión con remuestreo tiende a descartar algunas de esas soluciones y a localizar carteras incluso más robustas que las aportadas por otros algoritmos y, por lo tanto, hace que se consiga una mejora relativa superior a la media.

En resumen, como se ha podido ver en los resultados previos y así se muestra en la figura 6.1 (la cual contiene una comparación de las medias para todas las métricas y MOEAs), el mecanismo de incremento de robustez sugerido en este capítulo consigue aumentar significativamente la fiabilidad de las soluciones a través de los algoritmos. Las mejoras medias en términos ponderados han sido positivas para todos los indicadores de calidad evaluados con valores comprendidos entre:

- 20.09 % y 38.30 % en “Error de Estimación”
- 19.81 % y 44.65 % en “Estabilidad”
- 10.56 % y 18.05 % en “Rendimientos Inesperados”

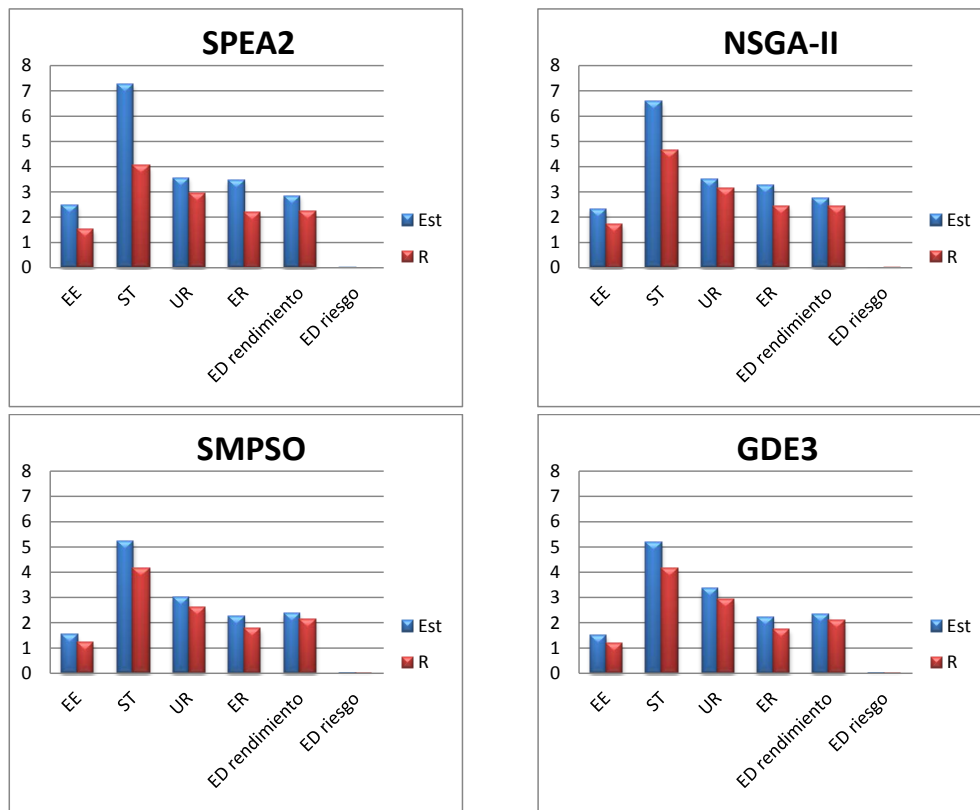


Figura 6.1: Comparación de resultados entre “Est” y “R”.

- 21.53 % y 37.23 % en “Riesgo Extremo”
- 9.64 % y 21.80 % en “Distancia Euclídea en Rendimiento”
- 10.10 % y 21.46 % en “Distancia Euclídea en Riesgo”

Lo antedicho se apoya en la amplia experimentación llevada a cabo variando diferentes parámetros de la tabla 6.1, aunque en esta sección sólo se hayan mostrado aquellos resultados más representativos. Tanto los no expuestos, como los mostrados en las tablas 6.2-6.6 junto con sus contrastes estadísticos de la tabla 6.7, sugieren que el uso de la técnica de remuestreo presentada en este capítulo incrementa la robustez de las soluciones y, por lo tanto, su fiabilidad. Por esta razón, se piensa que la técnica propuesta podría aumentar la confianza de los asesores de carteras al ofrecerles un frente robusto del que puedan escoger la cartera que más se adecue a sus preferencias.





## Capítulo 7

# Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo

En este capítulo se presenta un tercer método para incrementar la robustez en las carteras de inversión. El enfoque consiste en combinar una técnica de remuestreo con la inserción de una marca de tiempo que guíe al proceso de búsqueda hacia soluciones más estables. Tras una explicación sobre la función de evaluación que maneja esta técnica, la última sección muestra el proceso experimental llevado a cabo y los resultados obtenidos.

### 7.1. Descripción y Función de Fitness

Como ya se ha comentado en capítulos anteriores, un primer paso hacia el incremento de robustez en las soluciones puede ser remuestrear los parámetros durante el proceso de evolución reemplazándolos en cada generación para evaluar posteriormente los individuos sobre ellos. De este modo, el mismo proceso evolutivo favorece aquellas soluciones que se comportan bien en términos de riesgo y rendimiento sobre distintos escenarios factibles y descarta las que se hayan sobre-especializado en valores específicos de los parámetros.

La adaptación robusta planteada en el capítulo anterior sigue este planteamiento pero, aunque su proceso por sí solo sería suficiente para eliminar las

soluciones sobre-especializadas a través del tiempo, presenta un inconveniente importante, y es que algunas carteras podrían hacerse muy dependientes de los escenarios generados en las últimas iteraciones. Si en cada generación parte de la población anterior es reemplazada por nuevos individuos, y se da el caso en el que los últimos escenarios generados son especialmente atípicos, algunas de las soluciones que se han comportado bien a lo largo del tiempo pueden ahora mostrarse muy poco adecuadas en comparación con las demás y, por lo tanto, ser descartadas. Esta situación puede provocar que el frente de Pareto final contenga individuos especializados en el último conjunto de parámetros empeorando considerablemente los resultados (recordar que si la aparición de escenarios extremos ocurriera durante las primeras iteraciones sería el propio proceso evolutivo el que se encargaría de eliminar las carteras adaptadas a ellos).

Para prevenir el efecto comentado en el párrafo anterior, se añade al individuo una marca de tiempo que recoge su edad (cuántas generaciones hace que se creó), la cual se incluye como tercer objetivo a optimizar a la vez que el resto. Mediante la maximización de dicha marca (referida como  $T_p$ ) se premian a aquellas soluciones que más iteraciones hayan sobrevivido en la población y, de esta manera, se tienden a escoger las carteras “más antiguas” puesto que habrán mostrado buenas propiedades ante una variedad de escenarios mayor. Además también se desea que el operador de selección se aplique sobre individuos comparables bajo las mismas condiciones, y para ello esta nueva técnica evalúa en cada generación todos ellos (tanto los antiguos como los de reciente creación) ante el mismo conjunto de parámetros. Como se verá en la sección 7.3, los resultados muestran un gran incremento de robustez en las carteras.

El esquema básico del MOEA estándar más las modificaciones que este nuevo método realiza sobre él se describen en el algoritmo 13, donde el procedimiento seguido para evaluar su función de fitness extiende el modelo de remuestreo del capítulo anterior con el uso del nuevo objetivo adicional, el cual debe ser maximizado. Recordar que dicho modelo resolvía el problema estándar bi-objetivo en donde, en lugar de calcular el riesgo  $\sigma_p$  (ec. 3.1) y rendimiento  $E(R_p)$  (ec. 3.2) de las carteras sobre el conjunto de parámetros

---

**Algorithm 13** MOEA básico + Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo
 

---

```

1: (Pasos específicos del MOEA)
2: Reparar mediante el alg. 7 al inicializar la población
3: for cada generación  $g$  do
4:   A partir de  $S$ , el alg. 9 genera un nuevo conjunto  $S'_g$ 
5:   (Pasos específicos del MOEA)
6:   Reparar (alg. 8) después de aplicar los operadores genéticos sobre los nuevos individuos
7:   for cada individuo existente  $p$  do
8:     Calcular  $E(R_p)$  sobre  $S'_g$ 
9:     Calcular  $\sigma_p$  sobre  $S'_g$ 
10:     $T_p = T_p + 1$ 
11:   end for
12:   (Pasos específicos del MOEA)
13: end for
14: (Pasos específicos del MOEA)
15: MOEA devuelve el frente con soluciones no-dominadas  $P$ 
16: Calcular los parámetros estimados de  $S$  (conjunto original)
17: for cada individuo  $p$  de  $P$  do
18:   Calcular  $E(R_p)$  sobre  $S$ 
19:   Calcular  $\sigma_p$  sobre  $S$ 
20:   Descartar el objetivo de marca de tiempo  $T_p$ 
21: end for
22: Extraer los individuos no-dominados ( $P_f$ ) de  $P$ 
23: Devolver ( $P_f$ )

```

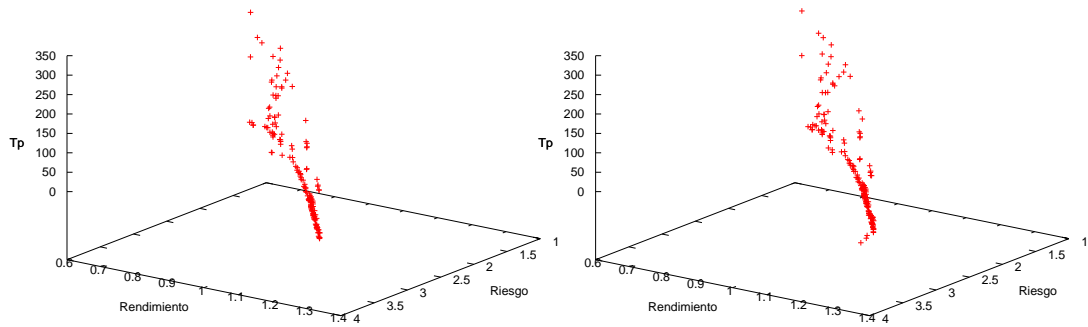
---

estimado, cada generación del proceso evolutivo creaba un nuevo escenario factible (paso 4) sobre el cual se evaluaban los nuevos individuos.

Como se comentaba previamente, una diferencia con respecto al método del capítulo anterior es que, con el fin de poder comparar bajo el mismo punto de vista todos los individuos participantes en una misma iteración  $g$  del MOEA, tanto las soluciones que provienen de generaciones previas como las de reciente creación se evalúan bajo el mismo conjunto de parámetros  $S_g$  producido para  $g$  (pasos 7-9). Recordar que estos escenarios  $S_g$  se generan mediante la estrategia de remuestreo descrita por el alg. 9

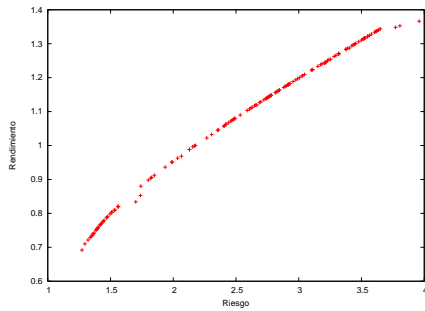
Otra diferencia es la implementación del tercer objetivo que recuerde la antigüedad del individuo. Éste consiste en añadir al mismo un contador (inicializado a cero) que recoja el número de generaciones que éste lleva en la población de modo que, cada vez que la cartera sea evaluada bajo un nuevo escenario remuestreado, dicho contador se incrementará en una unidad (paso

10). Por tanto, cuánto mayor sea esta marca de tiempo, más antigua será la cartera y, en consecuencia, mayor probabilidad tiene de ser estable ya que ésta habrá mostrado buenas propiedades en una variedad de escenarios mayor.



Frente con 3 objetivos evaluado  
sobre  $S_g$

Frente con 3 objetivos evaluado  
sobre los parámetros originales



Frente final con 2 objetivos evaluado  
sobre los parámetros originales

Figura 7.1: Ejemplo de procesamiento de un frente usando SPEA2.

Una vez que el proceso evolutivo ha acabado, la población se evalúa una vez más usando los valores estimados para el siguiente periodo a partir del conjunto original (pasos 16-19), y descartando a continuación el objetivo  $T_p$

de todos los individuos de la población (paso 20). Por lo tanto, el frente final está formado por los elementos de la población que son no-dominados en términos de riesgo y rendimiento (pasos 22 y 23). La figura 7.1 muestra un ejemplo gráfico del procesamiento de frentes descrito en los pasos 15-23 del algoritmo 13.

Se espera que la suma de todos estos cambios sobre el MOEA básico sirvan para descartar aquellas carteras que ante circunstancias normales puedan mostrarse muy sensibles a determinados escenarios previsibles, y se prioricen aquellas que ofrezcan soluciones buenas en un abanico de circunstancias más amplio.

## 7.2. Selección de Parámetros

Con el fin de elegir la configuración más adecuada, se han llevado a cabo distintas baterías de experimentos variando parámetros de los algoritmos (tales como el número de generaciones o el tamaño de la población) que pueden consultarse en el Apéndice B. La tabla 7.1 muestra la configuración seleccionada; ésta se diferencia de la 6.1 en que el número de generaciones utilizado como criterio de parada se ha aumentado a 300 pues, al existir un objetivo más a optimizar, se necesitan más iteraciones para asegurar la buena convergencia del MOEA.

Con fines comparativos, la técnica de marca de tiempo con remuestreo desarrollada se ha adaptado y probado en los mismos cuatro algoritmos multi-objetivo usados en el capítulo anterior (NSGA-II, SPEA2, SMPSO y GDE3). Recordar que todas las metaheurísticas se ejecutan bajo las restricciones habituales de cardinalidad  $[C_{min}, C_{max}]$  y de límites de inversión  $[lim_{inf}, lim_{sup}]$  establecidas a  $[2,6]$  y  $[0.1,0.8]$  respectivamente.

Como en experimentaciones anteriores, debido al uso de la técnica de ventana deslizante, el algoritmo 9 de remuestreo empleará como parámetros el conjunto de periodos de  $S$  correspondientes a la ventana temporal sobre la cual esté operando el MOEA.

El resto de parámetros de la tabla 7.1 no se comentan en esta sección pues ya se encuentran citados en las secciones 5.3 y 6.2 anteriores.

Tabla 7.1: Parámetros.  $L = 8$  (longitud del individuo).

Parámetros Comunes	
$N^\circ$ de generaciones	300
$C_{min}$	2
$C_{max}$	6
$lim_{inf}$	0.1
$lim_{sup}$	0.8
$S(TG)$	500
$Q(ER)$	100
$W(ER)$	0.05
$N^\circ$ de ejecuciones/ventana	20
SPEA2	
Tamaño de población	200 individuos
Tamaño del archivo	200 individuos
Cruce	SBX, $p_c = 0.9$
Mutación	Polynomial, $p_m = 1/L$
Selección	Binary tournament
NSGA-II	
Tamaño de población	200 individuos
Cruce	SBX, $p_c = 0.9$
Mutación	Polynomial, $p_m = 1/L$
Selección	Binary tournament
SMPSO	
Tamaño del archivo	200 partículas
Tamaño del enjambre	200 partículas
Mutación	Polynomial, $p_m = 1/L$
GDE3	
Variante	rand/1/bin
Tamaño de población	200 individuos
Cruce	DE crossover, $p_c = 0.9$ , $F = 0.5$
Selección	DE selection

### 7.3. Resultados

En esta sección se muestran los resultados obtenidos a partir del proceso experimental. El comportamiento de las versiones estándar (método básico de 2 objetivos con restricciones) se ha comparado con la versión robusta de cada uno de los cuatro MOEAs probados: SPEA2, NSGA-II, SMPSO y GDE3. Ambos métodos se han ejecutado 20 veces por algoritmo y ventana evaluando sus frentes mediante los indicadores de calidad  $EE$ ,  $ST$ ,  $UR$ ,  $ER$ ,  $ED_{E(R)}$  y  $ED_{\sigma^2}$ , descritos en la sección 4.2. En adelante, las tablas mostrarán la versión básica de cada MOEA denominada como “Est” y su versión robusta como

“R+T” (R+T significa Remuestreo + marca de Tiempo). Las tablas 7.2-7.6 muestran la media, mediana, varianza, máximo y mínimo valor encontrado así como el porcentaje de mejora (en media) que la versión con tres objetivos obtiene sobre la estándar.

Tabla 7.2: Error de Estimación

EE	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	2.5198	1.7945	5.1421	10.2558	0.0082	
SPEA2 R+T	1.1356	0.5538	2.4147	10.3009	0.0006	54.93 %
NSGA-II Est	2.2823	1.7996	3.9817	10.1840	0.0178	
NSGA-II R+T	1.2401	0.6609	2.3748	10.9488	0.0006	45.66 %
SMPSO Est	1.5204	1.2878	1.7354	11.7968	0.0148	
SMPSO R+T	<b>1.0144</b>	0.7403	0.9302	11.0123	0.0005	33.28 %
GDE3 Est	1.4820	1.2580	1.5347	9.7095	0.0198	
GDE3 R+T	1.0750	0.6721	1.2762	9.9779	0.0002	27.46 %

La tabla 7.2 muestra el conjunto de resultados en función de su error de estimación, el cual mide la distancia entre las carteras evaluadas con los parámetros estimados y los observados. Se puede apreciar cómo la ventaja de utilizar el enfoque “R+T” con respecto al estándar varía entre un 27.46 % (para GDE3) y un 54.93 % (para SPEA2). “SMPSO R+T” alcanza la menor media con un 1.0144 y, aunque su mediana sea mayor que la de SPEA2 y GDE3, su varianza sigue manteniéndose por debajo. A pesar de que SPEA2 es el algoritmo que más incrementa su robustez cuando se le adapta el enfoque sugerido, su *EE* (especialmente la varianza) sigue siendo superior al de “SMPSO R+T” puesto que es el MOEA con peor *EE* base. Por otro lado, NSGA-II parte de un error estándar elevado y obtiene el segundo mejor incremento de robustez (45.66 %), aunque eso no basta para situarlo al nivel del resto de algoritmos. También es importante destacar que, cuanto mayor sea el error de estimación del MOEA estándar, más se beneficia éste con el enfoque robusto aquí presentado.

La tabla 7.3 muestra los resultados del indicador que mide la estabilidad de los frentes. Éstos recogen la evaluación de las carteras de un frente sobre 500 escenarios factibles y devuelve la media de sus desviaciones. Los

Tabla 7.3: Estabilidad

ST	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	7.4057	7.0743	20.7329	33.7457	2.1059	
SPEA2 R+T	<b>2.4044</b>	2.1024	2.2526	13.5450	0.2694	67.53 %
NSGA-II Est	6.5508	6.1640	12.9661	26.3581	2.1452	
NSGA-II R+T	2.7433	2.5085	2.1520	17.1544	0.3028	58.12 %
SMPSO Est	5.2373	4.8981	7.2544	17.6850	0.7992	
SMPSO R+T	3.2510	2.8582	3.6025	18.3595	0.2949	37.93 %
GDE3 Est	5.1666	4.8507	6.8238	18.1729	0.6460	
GDE3 R+T	3.3270	2.9755	3.8045	15.3811	0.2354	35.61 %

resultados muestran que el método propuesto incrementa significativamente la estabilidad de las carteras generadas por los algoritmos estándar. De nuevo, los beneficios obtenidos por los MOEAs son especialmente destacables en aquellos casos en los que su formulación básica genere soluciones menos estables. A diferencia del *EE*, SPEA2 es el algoritmo cuya versión robusta proporciona mayor estabilidad a sus carteras a pesar de que las soluciones obtenidas por su versión estándar son las que peor *ST* poseen, razón por la cual también es el que mayor mejora media alcanza (67.53 %); sin embargo dicho porcentaje es el menor en “GDE3 R+T” (35.61 %), el cual además obtiene la peor *ST* promedio (así como mediana, varianza, máximo y mínimo) a pesar de ser el MOEA cuya versión estándar genera carteras más estables. Es interesante apreciar que cuanto peor es la estabilidad inicial de los algoritmos, más se benefician con la técnica de remuestreo con marca de tiempo y mayor estabilidad presentan sus carteras una vez dicha adaptación ha sido aplicada (obsérvese cómo este efecto se produce también en NSGA-II y SMPSO).

El tercer indicador empleado para evaluar la robustez de las carteras tiene en cuenta los rendimientos inesperados de los activos, es decir, mide la media del rendimiento que faltaría para alcanzar el máximo que se puede llegar a obtener en función de los parámetros observados. En la tabla 7.4 se ve cómo las soluciones obtenidas por el método “R+T” evaluadas ante los parámetros observados son más cercanas a la frontera óptima eficiente que aquellas carteras producidas a partir de los MOEAs estándar. Los resultados



Tabla 7.4: Rendimientos Inesperados

UR	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	3.5848	2.7989	8.5604	17.1760	0.1589	
SPEA2 R+T	2.4240	1.8792	3.9853	17.0790	0.1080	32.38 %
NSGA-II Est	3.4871	2.7326	7.8823	17.3582	0.1690	
NSGA-II R+T	2.5670	1.9975	4.1648	14.9636	0.1615	26.38 %
SMPSO Est	2.9805	2.4745	4.9961	13.0572	0.1298	
SMPSO R+T	<b>2.2514</b>	1.7717	2.9235	12.3090	0.0344	24.46 %
GDE3 Est	3.3518	2.9221	5.7049	14.4032	0.2670	
GDE3 R+T	2.6962	2.1723	4.5393	14.4161	0.0023	19.56 %

muestran mejoras entre el 19.56 % (en GDE3) y el 32.38 % (en SPEA2). Una vez más, el mejor valor (2.2514) es obtenido por la versión robusta de SMPSO aunque no sea el algoritmo con mayor incremento de robustez (24.46 %). GDE3 es el menos favorecido a pesar de no ser el MOEA con menor *UR* en su versión estándar; además, tanto la media como la mediana y la varianza de su versión robusta son peores a las equivalentes en el resto de algoritmos. Existe una tendencia parecida al caso del *EE*, pues la técnica “R+T” disminuye el valor de *UR* en mayor medida en los algoritmos que peor *UR* presentan su versiones básicas, a excepción del GDE3 que resulta ser el que peor se comporta.

Tabla 7.5: Riesgo Extremo

ER	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	3.5308	3.0614	4.9670	10.7373	0.4353	
SPEA2 R+T	1.6622	1.0862	2.5638	11.2191	0.1686	52.92 %
NSGA-II Est	3.2407	2.8451	3.9687	10.7281	0.4180	
NSGA-II R+T	1.8172	1.2318	2.5525	10.6885	0.1675	43.93 %
SMPSO Est	2.2485	2.0297	1.8884	11.9282	0.1659	
SMPSO R+T	<b>1.4671</b>	1.2126	1.0257	11.1526	0.1253	34.75 %
GDE3 Est	2.2091	1.9701	1.7397	9.7109	0.1466	
GDE3 R+T	1.6425	1.2577	1.5775	9.0459	0.0530	25.65 %

Las soluciones evaluadas bajo los parámetros más problemáticos, mostrados en la tabla 7.5, siguen el patrón de comportamiento ya observado en *EE*. Merece la pena destacar que las carteras generadas por el enfoque ro-

busto presentado son más estables que las soluciones obtenidas por la versión estándar de los MOEAs al evaluarse todas en los peores escenarios. En este caso, incluso si “SPEA2 R+T” ofrece la mejor mediana, en media es superado por la versión robusta de GDE3 y SMPSO, proveyendo éste último la menor media y varianza de todo el conjunto de algoritmos. Los mayores beneficios se obtienen para aquellas metaheurísticas con peor valor inicial como por ejemplo el SPEA2, cuyo método robusto disminuye en un 52.92 % el valor de  $ER$  medio de su versión estándar. De igual modo, la menor mejora conseguida (un 25.65 %) ha sido para el algoritmo GDE3, cuyo  $ER$  base es de 2.2091 (el menor de los cuatro MOEAs).

Tabla 7.6: Distancias Euclídeas

$ED_{E(R)}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	2.8711	2.1098	7.2119	20.6422	0.1095	
SPEA2 R+T	<b>1.7440</b>	1.1003	3.5589	20.5964	0.0332	39.26 %
NSGA-II Est	2.7437	2.0486	6.4505	19.7771	0.1280	
NSGA-II R+T	1.8619	1.2304	3.6272	17.2972	0.0721	32.14 %
SMPSO Est	2.3546	1.6358	5.3207	17.5193	0.0947	
SMPSO R+T	1.8396	1.3565	3.3498	16.4419	0.0240	21.87 %
GDE3 Est	2.3230	1.6123	5.1411	17.9217	0.1028	
GDE3 R+T	1.8719	1.2918	4.0086	18.0265	0.0238	19.42 %
$ED_{\sigma^2}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Mejora
SPEA2 Est	0.0208	0.0103	0.0020	0.4745	0.0016	
SPEA2 R+T	<b>0.0129</b>	0.0051	0.0011	0.4330	0.0004	38.09 %
NSGA-II Est	0.0199	0.0097	0.0019	0.4559	0.0017	
NSGA-II R+T	0.0137	0.0057	0.0011	0.4140	0.0004	31.07 %
SMPSO Est	0.0172	0.0085	0.0016	0.4261	0.0012	
SMPSO R+T	0.0134	0.0065	0.0012	0.4028	0.0005	21.89 %
GDE3 Est	0.0169	0.0085	0.0016	0.4347	0.0009	
GDE3 R+T	0.0142	0.0066	0.0014	0.4530	2.7e-05	16.24 %

Finalmente se evalúa el doble indicador. A pesar de mostrarse a la vez, la tabla 7.6 contiene la  $ED$  en términos de rendimiento en su mitad superior y el mismo indicador en función del riesgo en su mitad inferior. La distancia euclídea se calcula en ambos casos entre las carteras evaluadas sobre los parámetros estimados y los observados a posteriori. La evaluación de las soluciones en  $ED_{E(R)}$  y  $ED_{\sigma^2}$  muestra una tendencia muy parecida a la

observada en  $EE$  y  $ER$ . Los beneficios obtenidos en  $ED_{E(R)}$  por aplicar la técnica robusta a los algoritmos varían de un 39.26 % (en SPEA2) a un 19.42 % (en GDE3), mientras que en  $ED_{\sigma^2}$  dichos porcentajes son ligeramente inferiores. En ambas distancias de riesgo y rendimiento SPEA2 es el algoritmo en el que, a pesar de que su versión estándar proporciona las carteras con peor  $ED$ , su “R+T” disminuye estas distancias en un 38.09 %, logrando que sean inferiores al resto de MOEAs. Por el contrario, GDE3 es el algoritmo que menos se beneficia del remuestreo pues, a pesar de partir con las menores distancias euclídeas iniciales, el enfoque produce un incremento de un 16.24 % que no es suficiente para hacerlo competitivo frente al resto de algoritmos. Es importante destacar que, independientemente del MOEA, la técnica de remuestreo con marca de tiempo ha ayudado muy positivamente a mejorar la robustez de las soluciones.

Tabla 7.7: Test Estadísticos de los indicadores de calidad.

	EE	ST	ER	UR	ED $E(R)$	ED $\sigma^2$
<b>SPEA2 R+T / SPEA2 Est</b>	--	--	--	--	--	--
<b>NSGA-II R+T / NSGA-II Est</b>	--	--	--	--	--	--
<b>SMP SO R+T / SMP SO Est</b>	--	--	--	--	--	--
<b>GDE3 R+T / GDE3 Est</b>	--	--	--	--	--	--

Además de las medidas estadísticas recién mostradas, también se contrastan las diferencias entre experimentos aplicando el test de significación estadística del algoritmo 4.3 a los valores de las métricas que evalúan las carteras obtenidas por la versión estándar y robusta de los algoritmos. Como se puede ver en la tabla 7.7, todas las diferencias entre los MOEAs estándar y los “R+T” han resultado ser significativas al 1 %.

En resumen, según los resultados anteriores y como se muestra visualmente en la figura 7.2, independientemente del algoritmo escogido, el mecanismo propuesto “R+T” incrementa significativamente la fiabilidad de las soluciones en relación a las versiones básicas. La peor mejora conseguida es del 16.24 % evaluando la distancia euclídea del riesgo en GDE3, y la mayor alcanzada es del 67.53 % al evaluar la estabilidad sobre SPEA2. También se observa cómo

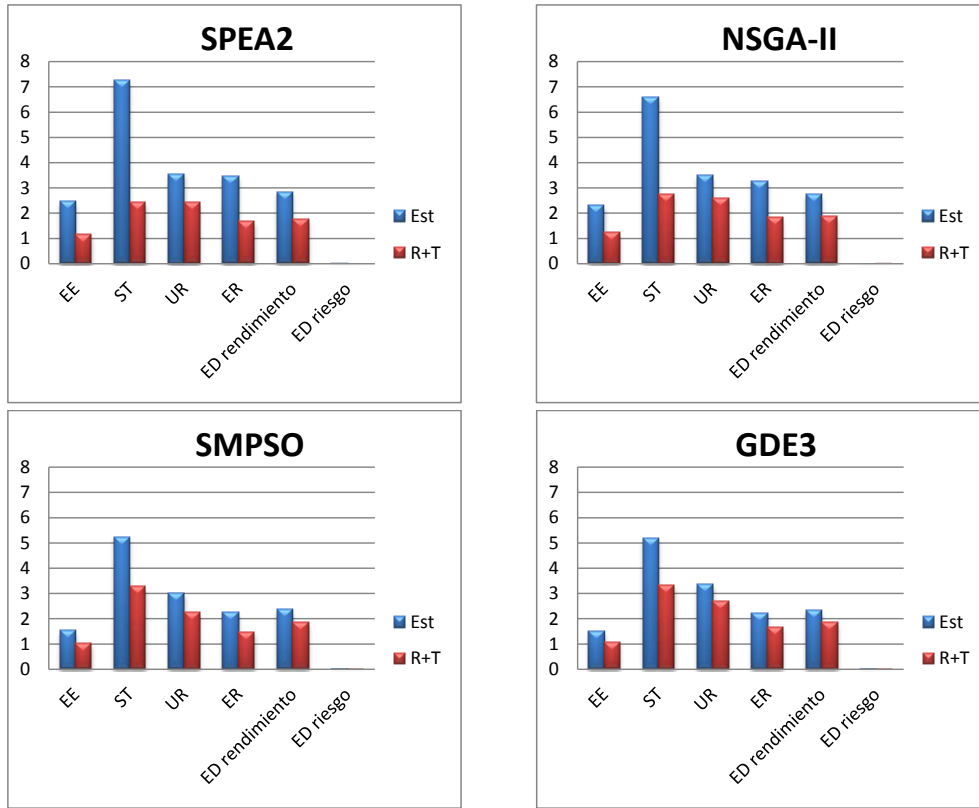


Figura 7.2: Comparación de resultados entre “Est” y “R+T”.

el mecanismo “R+T” ayuda más a aquellos MOEAs que producen frentes más inestables. Respecto a las versiones estándar de los algoritmos, GDE3 es el que provee mayor robustez seguido de SMPSO, NSGA-II y, por último, SPEA2.

Además de los resultados mostrados en esta sección, se han llevado a cabo más baterías de experimentos alterando la configuración de la tabla 6.1 (a consultar en el Apéndice B). Tanto ellos como los expuestos en las tablas 7.2-7.7 muestran en términos de robustez cómo tanto “SMPSO R+T” como el “SPEA2 R+T” parecen ser las aproximaciones más adecuadas, pues la primera presenta el menor valor en tres de los seis indicadores evaluados (EE, UR y ER) mientras que la segunda, a pesar de ser la que más es beneficiada en todos los casos, también alcanza las mejores estabilidades y distancias euclídeas tanto de riesgo como en rendimiento.

## Capítulo 8

# Comparación de los Resultados

En este capítulo se resume y compara toda la experimentación llevada a cabo. Inicialmente se presenta el modelo escogido del estado del arte que se utiliza para comparar con los enfoques propuestos. A continuación se analizan las diferencias entre métodos y, por último, se muestra una evaluación de soluciones por rangos.

### 8.1. Modelo de Comparación: *Random Matrix Approach*

Para mostrar la aportación al mundo de la optimización robusta de carteras de los métodos diseñados en esta tesis doctoral, se escoge una técnica perteneciente a la literatura que trata de lidiar con este problema. Recordar que en este contexto existen diferentes maneras de abordar el problema, siendo dos las más utilizadas: una que pone más énfasis en conseguir estimaciones robustas para los parámetros (mediante su filtrado), y la otra que controla dicha robustez gestionando el proceso de optimización (donde se clasifican las técnicas con remuestreo desarrolladas). Por tanto, de los métodos existentes estudiados en la sección 2.4, se ha decidido escoger uno que pertenezca a un enfoque diferente al de las estrategias diseñadas.

La técnica elegida fue publicada por [Plerou et al., 2002], bajo el título *Random Matrix Approach to Cross Correlations in Financial Data* (RMA

en adelante), y tiene como principal objetivo reforzar la robustez mediante el filtrado de parámetros. Más concretamente, los autores aplican al ámbito financiero la “Teoría de Matrices Aleatorias” o *Random Matrix Theory*. Esta teoría tiene su origen en la física nuclear, y fue desarrollada hace más de 50 años por los físicos Wigner, Dyson y demás miembros de su equipo para explicar la estadísticas de los diferentes niveles de energía de los sistemas cuánticos complejos.

En RMA, los autores sostienen que la matriz de varianzas-covarianzas (o su correspondiente matriz de correlaciones  $C$ ) estimada directamente a partir de series de rendimientos históricos está contaminada por correlaciones espúreas. Es decir, que dicha matriz (empleada para calcular el riesgo de las carteras) contiene correlaciones que, no sólo no aportan información útil a la hora de predecir los parámetros, sino que además introducen ruido haciendo que dichas estimaciones sean más imprecisas.

Concretamente, se habla de que el análisis de las propiedades de  $C$  muestra que aproximadamente el 98 % de sus autovalores sigue la misma distribución que la de un conjunto de matrices aleatorias, hecho que sugiere un alto grado de aleatoriedad en estas covarianzas. En cambio, el 2 % restante se corresponde con los autovalores que se desvían de esta distribución. Analizando estas desviaciones para una muestra de datos concreta, los autores descubren que:

- El mayor autovalor (y su correspondiente autovector) representan la influencia del mercado sobre todos los activos.
- Empleando el resto de vectores propios es posible dividir el conjunto de todos los activos en diferentes subconjuntos correspondientes a diferentes sectores de actividad.
- El uso de estos autovectores en la optimización de carteras es útil para generar soluciones estables en el tiempo (ver figura 8.1).

Por tanto, con el fin de limitar el problema mencionado, Plerou y su equipo proponen un sistema de filtrado y reconstrucción de la matriz  $C$  (a partir del análisis de sus autovalores y autovectores) para eliminar aquellas

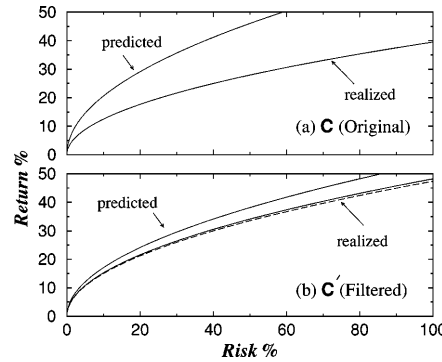


Figura 8.1: Carteras optimizadas usando la matriz original  $C$  (arriba) y la matriz filtrada  $C'$  (abajo) [Plerou et al., 2002].

correlaciones espúreas que entorpezcan en las predicciones y conservar ese 2 % que conduzca a generar estimaciones más ajustadas al comportamiento real de las carteras.

Por último comentar que, como el método RMA proporciona una matriz de varianzas-covarianzas filtrada  $C'$ , ésta se puede adaptar fácilmente a la formulación básica de los MOEAs ya que tan sólo hay que utilizar este parámetro en la función de fitness (la correspondiente al uso de dicha matriz para calcular el riesgo de las carteras) en lugar del estimado directamente sobre las series de rendimientos históricos. De este modo, el método citado se puede evaluar bajo exactamente las mismas condiciones (algoritmos, configuración, restricciones, etc.) que el resto de las técnicas estudiadas en este documento.

Puesto que la estrategia de la matriz filtrada se desea comparar con los tres métodos robustos planteados en este documento, y como éstos trabajan con restricciones y utilizan distintos parámetros, el modelo RMA se ha implementado y adaptado al código de cada uno de los cuatro MOEAs considerados. Por tanto, se han llevado a cabo diferentes baterías de experimentos con las dos configuraciones empleadas en los capítulos anteriores y definidas en las tablas 6.1 y 7.1, cuyos resultados obtenidos se muestran en las tablas 8.1 y 8.2.

Se puede observar cómo en todos los indicadores de calidad la versión ejecutada con 100 generaciones en general aporta mejores valores que la que emplea 300 iteraciones en su proceso evolutivo. Respecto a las métricas, es

Tabla 8.1: RMA para 100 y 300 generaciones. *EE*, *ST* y *UR*.

<i>EE</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo
SPEA2 100g	2.4641	1.8305	4.8759	10.2268	0.0159
SPEA2 300g	2.5141	1.8741	5.0328	10.4950	0.0167
NSGAI 100g	1.4887	1.1990	1.7256	9.3250	0.0206
NSGAI 300g	2.2829	1.7861	3.9476	10.0864	0.0254
SMPSO 100g	1.5157	1.2595	1.6444	11.3568	0.0238
SMPSO 300g	1.5329	1.2605	1.6466	9.7110	0.0133
GDE3 100g	1.4997	1.2150	1.5936	8.2562	0.0272
GDE3 300g	1.5239	1.2509	1.6106	9.4052	0.0457
<i>ST</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo
SPEA2 100g	7.1706	6.8593	18.4806	33.3571	2.1386
SPEA2 300g	7.3395	6.9888	20.4416	34.5594	2.2374
NSGAI 100g	5.1792	4.8551	7.0221	18.6789	0.5674
NSGAI 300g	6.4848	6.0995	12.5979	26.3888	2.0686
SMPSO 100g	5.1918	4.8283	7.1015	18.2277	0.4898
SMPSO 300g	5.1854	4.8438	7.0046	17.4122	0.4574
GDE3 100g	5.1087	4.7948	6.9087	16.8962	0.3897
GDE3 300g	5.1747	4.8367	7.0021	17.2225	0.5273
<i>UR</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo
SPEA2 100g	3.5444	2.7773	8.2723	16.8765	0.1648
SPEA2 300g	3.5717	2.7924	8.3615	16.6986	0.1627
NSGAI 100g	2.9852	2.4770	5.3341	14.0070	0.1153
NSGAI 300g	3.4819	2.7546	7.7669	16.9892	0.1700
SMPSO 100g	2.9599	2.4946	4.8766	13.2550	0.1218
SMPSO 300g	2.9775	2.5059	5.0798	13.2221	0.1231
GDE3 100g	3.3335	2.8919	5.8352	15.5834	0.2618
GDE3 300g	3.3493	2.8870	5.7916	14.2612	0.2572

necesario señalar que las distancias euclídeas de riesgo son lógicamente superiores al resto de métodos empleados en esta tesis, pues RMA utiliza una matriz de varianzas-covarianzas filtrada en su proceso de optimización distinta al resto de técnicas. Con el fin de comparar todos los métodos planteados en esta tesis ante las mismas condiciones, dicha matriz filtrada no se usa para calcular los indicadores de calidad comunes para todos ellos.



Tabla 8.2: RMA para 100 y 300 generaciones.  $ER$ ,  $ED_{E(R)}$  y  $ED_{\sigma^2}$ .

$ER$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo
SPEA2 100g	3.4463	2.9919	4.5913	10.4465	0.4299
SPEA2 300g	3.5037	3.0240	4.7290	10.8314	0.4344
NSGAI 100g	2.2214	1.9823	1.8428	9.4168	0.1856
NSGAI 300g	3.2208	2.8327	3.8193	10.4985	0.4050
SMPSO 100g	2.2051	1.9934	1.8084	11.4487	0.2383
SMPSO 300g	2.2218	1.9981	1.8173	9.7008	0.2098
GDE3 100g	2.1864	1.9482	1.7904	8.2772	0.2300
GDE3 300g	2.2137	2.0247	1.7928	9.4625	0.2644
$ED_{E(R)}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo
SPEA2 100g	2.8271	2.0704	6.8642	20.3217	0.1168
SPEA2 300g	2.8537	2.0903	6.9474	20.1233	0.1202
NSGAI 100g	2.7292	1.9910	6.2885	19.3948	0.1359
NSGAI 300g	2.7302	1.9931	6.2697	19.3834	0.1466
SMPSO 100g	2.3293	1.6071	5.2371	17.9778	0.1022
SMPSO 300g	2.3379	1.6323	5.2286	17.6650	0.0841
GDE3 100g	2.3131	1.6320	5.1635	18.7820	0.0902
GDE3 300g	2.3391	1.6123	5.2704	17.7494	0.0770
$ED_{\sigma^2}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo
SPEA2 100g	0.0418	0.0317	0.0015	0.3395	0.0050
SPEA2 300g	0.0422	0.0320	0.0015	0.3376	0.0049
NSGAI 300g	0.0416	0.0321	0.0014	0.3267	0.0055
NSGAI 300g	0.0417	0.0321	0.0014	0.3237	0.0055
SMPSO 100g	0.0820	0.0828	0.0012	0.3331	0.0079
SMPSO 300g	0.0816	0.0817	0.0012	0.3281	0.0055
GDE3 100g	0.0816	0.0816	0.0012	0.3510	0.0080
GDE3 300g	0.0816	0.0824	0.0012	0.3275	0.0060

## 8.2. Comparación de Resultados

En esta sección se comparan los resultados obtenidos por RMA, por los métodos que se proponen en esta tesis y por las versiones estándar de los algoritmos. Debido a que éstos ya han sido desglosados y analizados en los capítulos anteriores, y con el fin de facilitar la legibilidad de las tablas, para esta comparación sólo se muestra el valor medio de las métricas. A esto también se añade el porcentaje de beneficio respecto a la media de cada uno de ellos sobre sus versiones estándar (nombrado como “mejora/Est”) y RMA (denotado como “mejora/RMA”) correspondientes. Estos datos se muestran por algoritmos en la tablas 8.3 y 8.4, y por indicadores de calidad en las gráficas de la figura 8.2. Con respecto al método de inclusión de robustez como objetivo, sólo el conjunto de frentes con estabilidad alta es de interés, a partir de este punto se va a hacer referencia a los resultados considerando “R”, “R+T” y “Alta”, dejando el estudio de “Media” y “Baja” para el final de este apartado.

En general, es posible observar cómo la versión propuesta por Plerou que trabaja sobre una matriz filtrada genera carteras más robustas con cualquiera de los MOEAs que sus propias versiones estándar; en todos los casos, a excepción de la evaluación del error de estimación en SMPSO, RMA presenta mejores indicadores de calidad y, por tanto, sus diferencias con los métodos que emplean remuestreo son menores. Recordar de nuevo que debe tenerse en baja consideración el valor de  $ED_{\sigma^2}$  para RMA.

Los cuatro métodos robustos vistos hasta ahora generan carteras estables en comparación con el proceso de optimización bi-objetivo estándar; destacar que existe una gran diferencia entre RMA y las técnicas con remuestreo, siendo éstas últimas claramente más eficientes. En la mayoría de los casos, los indicadores de los segundos son inferiores a los de RMA con porcentajes que varían entre el 8.97 % ( $ED_{E(R)}$  en “SMPSO R”) y el 67.24 % ( $ST$  en “SPEA2 R+T”), a excepción de tres situaciones en las que ninguna de las técnicas con remuestreo propuestas consigue mejores resultados (véase el decremento sobre RMA empleando “NSGA-II R” en  $UR$ : -4.61 %,  $ER$ : -9.83 % o  $EE$ : -15.13 %). De igual modo, las mejoras de los métodos con remuestreo sobre

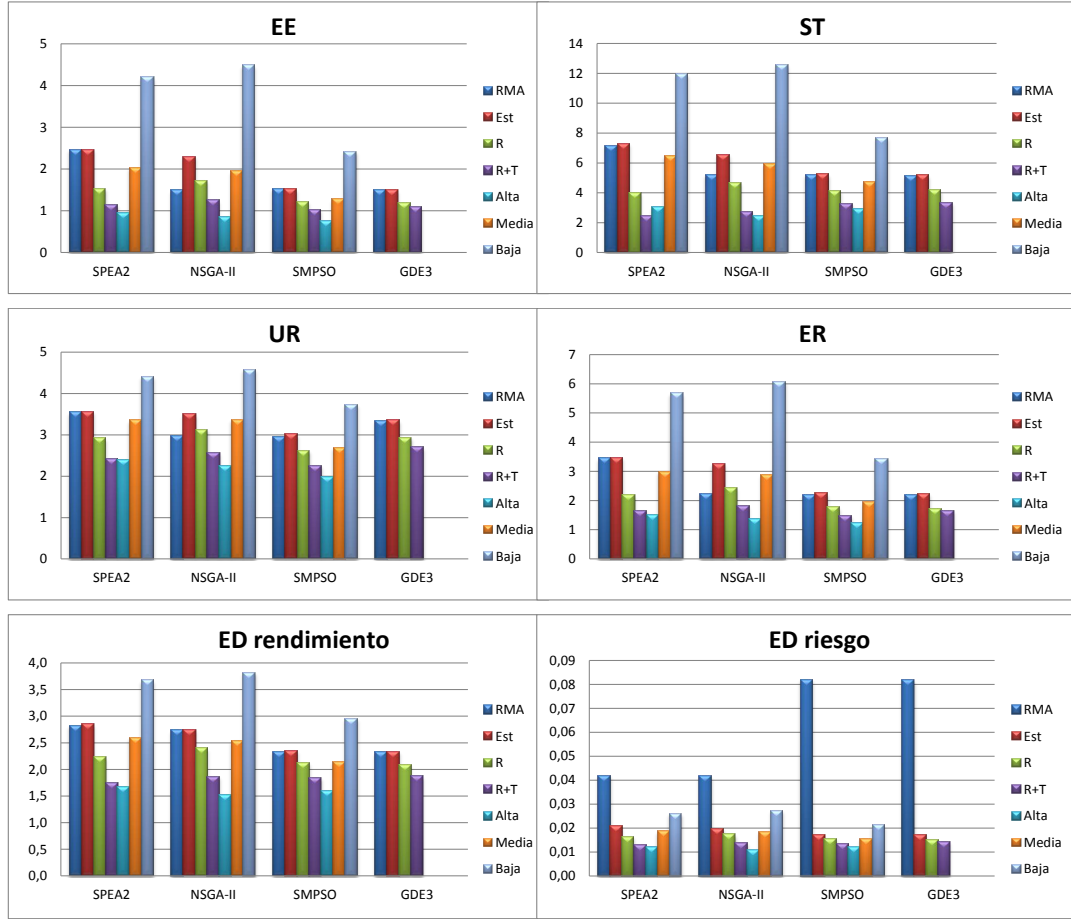


Figura 8.2: Comparación de todos los resultados.

los algoritmos estándar varían entre el 9.64 % (sobre  $ED_{E(R)}$  con “SMPSO R”) y el 67.53 % (sobre  $ST$  con “SPEA2 R+T”). Además, todas las diferencias entre los MOEAs estándar y RMA, y las versiones con remuestreo “R”, “R+” o “Alta”, son significativas al 1 %.

Comparando los métodos robustos entre sí se observa que los mayores progresos se logran para el conjunto de frentes con estabilidad “Alta”, siendo su adaptación al SPEA2 la que mejor se comporta en función de su versión estándar con un decremento de hasta el 62.75 % en  $EE$ . De hecho, “Alta” disminuye más que el resto las medias de los indicadores para todos los casos exceptuando la evaluación de  $ST$  en SPEA2, cuyo “R+T” es más eficiente sobre ambas versiones RMA (67.24 %) y estándar (67.53 %), alcanzando un

valor mínimo de 2.4044.

La técnica que se ayuda de una marca de tiempo (tercer método propuesto) también resulta ser muy beneficiosa pues aporta incrementos que varían entre el 19.50 % (sobre “RMA”) o 19.56 % (sobre “Est”) en  $UR$  con GDE3, y el 67.24 % (sobre RMA) o 67.53 % (sobre “Est”) en  $ST$  con SPEA2, y los promedios de sus métricas son inferiores a los conseguidos por “R”. También es importante destacar que, a pesar de que los indicadores de “R+T” son ligeramente peores que los de “Alta”, sus frentes contienen más puntos ya que a éste último conjunto sólo pertenecen el tercio de carteras del frente global con mayor estabilidad.

Aunque el método “R” es el que menos eficiente parece ser de los tres, sus carteras presentan un beneficio importante con respecto a los algoritmos estándar o a la técnica de matriz filtrada; de hecho, a excepción de las tres situaciones comentadas previamente, “R” consigue mejoras entre el 8.97 % (en “SMPSO RMA” sobre  $UR$ ) y el 44.65 % (en “SPEA2 Est” sobre  $ST$ ) y presenta valores medios de métricas notablemente superiores al caso base o RMA.

En resumen, los dos métodos más interesantes son “Alta ” y “R+T” como así reflejan sus resultados. Más específicamente, los mejores valores alcanzados en toda la experimentación han sido los siguientes:

- $EE = 0.7660$  con la versión “Alta” de SMPSO.
- $ST = 2.4044$  con la versión “R+T” de SPEA2.
- $UR = 1.9837$  con la versión “Alta” de SMPSO.
- $ER = 1.2384$  con la versión “Alta” de SMPSO.
- $ED_{E(R)} = 1.5194$  con la versión “Alta” de NSGA-II.
- $ED_{\sigma_2} = 0.0109$  con la versión “Alta” de NSGA-II.

Para terminar, es interesante observar cómo el conjunto de soluciones con estabilidades “Media” y “Baja” se han comportado como según lo esperado. “Media” contiene carteras de inversión menos robustas que las previamente

analizadas aunque, sin embargo, sigue mejorando las versiones estándar y RMA. Concretamente, dichos beneficios varían entre un 3.5 % y un 19.29 % dependiendo del algoritmo e indicador utilizado. Respecto al último tipo de frentes con estabilidad “Baja”, se observa claramente que todos ellos contienen carteras mucho menos robustas que el resto de conjuntos analizados; este hecho confirma el planteamiento sobre el cual se basa el método explicado en el capítulo 5.

Tabla 8.3: Resumen de resultados. SPEA2 y NSGA-II.

SPEA2						
		R	R+T	Alta	Media	Baja
<i>EE</i>	media	1.5221	1.1356	<b>0.9387</b>	2.0338	4.1945
	mejora/RMA	38.23 %	54.83 %	62.66 %	19.10 %	-66.84 %
	mejora/Est	38.30 %	54.93 %	62.75 %	19.29 %	-66.46 %
<i>ST</i>	media	4.0202	<b>2.4044</b>	3.0420	6.4575	11.9334
	mejora/RMA	43.94 %	67.24 %	58.55 %	12.02 %	-62.59 %
	mejora/Est	44.65 %	67.53 %	58.92 %	12.80 %	-61.14 %
<i>UR</i>	media	2.9135	2.4240	<b>2.3903</b>	3.3552	4.3958
	mejora/RMA	17.80 %	32.13 %	33.08 %	6.06 %	-23.07 %
	mejora/Est	18.05 %	32.38 %	33.32 %	6.40 %	-22.62 %
<i>ER</i>	media	2.1794	1.6622	<b>1.5177</b>	2.9764	5.6684
	mejora/RMA	36.76 %	52.56 %	56.68 %	15.05 %	-61.78 %
	mejora/Est	37.23 %	52.92 %	57.02 %	15.70 %	-60.54 %
<i>ED<sub>E(R)</sub></i>	media	2.2237	1.7440	<b>1.6710</b>	2.5869	3.6721
	mejora/RMA	21.34 %	38.88 %	41.44 %	9.35 %	-28.68 %
	mejora/Est	21.80 %	39.26 %	41.80 %	9.90 %	-27.90 %
<i>ED<sub><math>\sigma^2</math></sub></i>	media	0.0161	0.0129	<b>0.0121</b>	0.0186	0.0259
	mejora/RMA	61.32 %	69.53 %	71.42 %	55.93 %	38.50 %
	mejora/Est	21.46 %	38.09 %	41.93 %	10.45 %	-24.97 %
NSGA-II						
		R	R+T	Alta	Media	Baja
<i>EE</i>	media	1.7138	1.2401	<b>0.8557</b>	1.9449	4.4823
	mejora/RMA	-15.13 %	45.68 %	62.52 %	14.81 %	-96.34 %
	mejora/Est	25.01 %	45.66 %	62.51 %	14.78 %	-96.40 %
<i>ST</i>	media	4.6390	2.7433	<b>2.4584</b>	5.9243	12.5490
	mejora/RMA	10.43 %	57.70 %	62.09 %	8.64 %	-93.51 %
	mejora/Est	29.21 %	58.12 %	62.47 %	9.56 %	-91.56 %
<i>UR</i>	media	3.1227	2.5670	<b>2.2413</b>	3.3600	4.5813
	mejora/RMA	-4.61 %	26.27 %	35.63 %	3.50 %	-31.58 %
	mejora/Est	10.56 %	26.38 %	35.72 %	3.64 %	-31.38 %
<i>ER</i>	media	2.4399	1.8172	<b>1.3633</b>	2.8657	6.0523
	mejora/RMA	-9.83 %	43.58 %	57.67 %	11.02 %	-87.91 %
	mejora/Est	24.83 %	43.93 %	57.93 %	11.57 %	-86.76 %
<i>ED<sub>E(R)</sub></i>	media	2.3918	1.8619	<b>1.5194</b>	2.5373	3.8095
	mejora/RMA	12.36 %	31.80 %	44.35 %	7.07 %	-39.53 %
	mejora/Est	12.85 %	32.14 %	44.62 %	7.53 %	-38.84 %
<i>ED<sub><math>\sigma^2</math></sub></i>	media	0.0173	0.0137	<b>0.0109</b>	0.0183	0.0270
	mejora/RMA	58.36 %	67.15 %	73.92 %	56.10 %	35.16 %
	mejora/Est	12.64 %	20.38 %	45.28 %	7.89 %	-36.04 %

Tabla 8.4: Resumen de resultados. SMPSO y GDE3.

SMPSO						
		<b>R</b>	<b>R+T</b>	<b>Alta</b>	<b>Media</b>	<b>Baja</b>
<i>EE</i>	media	1.2058	1.0144	<b>0.7660</b>	1.2768	2.4097
	mejora/RMA	20.45 %	33.82 %	50.03 %	16.71 %	-57.20 %
	mejora/Est	20.09 %	33.28 %	49.62 %	16.03 %	-58.48 %
<i>ST</i>	media	4.1290	3.2510	<b>2.9181</b>	4.7198	7.6971
	mejora/RMA	20.47 %	37.30 %	43.72 %	8.98 %	-48.44 %
	mejora/Est	21.11 %	37.93 %	44.28 %	9.88 %	-46.97 %
<i>UR</i>	media	2.6159	2.2514	<b>1.9837</b>	2.6855	3.7202
	mejora/RMA	11.62 %	24.39 %	33.38 %	9.81 %	-24.94 %
	mejora/Est	12.93 %	24.46 %	33.44 %	9.90 %	-24.82 %
<i>ER</i>	media	1.7599	1.4671	<b>1.2384</b>	1.9356	3.4179
	mejora/RMA	20.19 %	33.97 %	44.26 %	12.88 %	-53.83 %
	mejora/Est	21.53 %	34.75 %	44.92 %	13.92 %	-52.01 %
<i>ED<sub>E(R)</sub></i>	media	2.1204	1.8396	<b>1.6053</b>	2.1380	2.9498
	mejora/RMA	8.97 %	21.32 %	31.34 %	8.55 %	-26.17 %
	mejora/Est	9.64 %	21.87 %	31.82 %	9.20 %	-25.28 %
<i>ED<sub><math>\sigma^2</math></sub></i>	media	0.0154	0.0134	<b>0.0119</b>	0.0157	0.0211
	mejora/RMA	81.19 %	83.53 %	85.36 %	80.82 %	74.09 %
	mejora/Est	10.10 %	21.89 %	30.57 %	9.05 %	-22.86 %

GDE3			
		<b>R</b>	<b>R+T</b>
<i>EE</i>	media	1.1787	<b>1.0750</b>
	mejora/RMA	21.40 %	29.45 %
	mejora/Est	20.85 %	27.46 %
<i>ST</i>	media	4.1460	<b>3.3270</b>
	mejora/RMA	18.84 %	35.71 %
	mejora/Est	19.81 %	35.61 %
<i>UR</i>	media	2.9243	<b>2.6962</b>
	mejora/RMA	12.28 %	19.50 %
	mejora/Est	12.64 %	19.56 %
<i>ER</i>	media	1.7167	<b>1.6425</b>
	mejora/RMA	21.48 %	25.80 %
	mejora/Est	22.44 %	25.65 %
<i>ED<sub>E(R)</sub></i>	media	2.0867	<b>1.8719</b>
	mejora/RMA	9.79 %	19.97 %
	mejora/Est	10.35 %	19.42 %
<i>ED<sub><math>\sigma^2</math></sub></i>	media	0.0152	<b>0.0142</b>
	mejora/RMA	81.40 %	82.62 %
	mejora/Est	10.95 %	16.24 %

### 8.3. Comparativa Segmentada

Puesto que las técnicas desarrolladas en esta investigación tratan de encontrar aquellas carteras de inversión que sean más robustas, sus frentes resultado no tendrán la misma distribución que los obtenidos por las versiones estándar y RMA haciendo que sus soluciones se localicen en zonas más concretas del frente en lugar de expandirse uniformemente. Esto último se debe a que el proceso de optimización para los algoritmos estándar y con matriz filtrada no contempla la estabilidad de las carteras y se centra más en mantener la diversidad de los puntos del frente. Por tanto, y en función del método escogido, el mayor cúmulo de soluciones no se situarán exactamente en el mismo lugar.

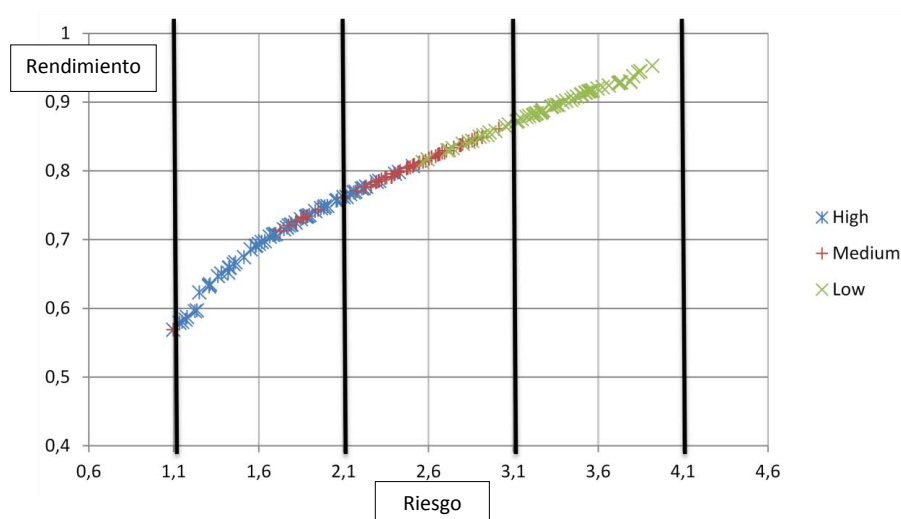


Figura 8.3: Ejemplo de división de un frente por regiones.

En este apartado, con el fin de realizar una comparación más exhaustiva de los resultados mostrados, se desean comparar carteras con el mismo valor de riesgo. En cambio, es muy poco probable encontrar soluciones que exactamente coincidan en riesgo y, por ello, para cada método robusto se escogerá la sección de sus frentes que posea mayor densidad y se comparará con la misma sección correspondiente a sus versiones estándar y RMA. Como se quiere que esta sección abarque una muestra representativa de carteras, interesa que al menos contenga el 50 % de los puntos del frente. Al igual que



en ocasiones anteriores, la robustez de las carteras se evalúa mediante el uso de los seis indicadores de calidad utilizados en esta investigación. De este modo, para localizar la región deseada, se halla el rango de puntos común a todos los frentes resultado donde se sitúen la mayoría de las carteras y se divide en diferentes porciones de riesgo mediante ejes de corte verticales tal y como se muestra en la figura 8.3. Para evitar mostrar un número excesivo de datos y facilitar la comprensión de los mismos, el análisis de este apartado se centra en SPEA2.

Una vez hallado el rango común a todos los frentes, se ha observado que la mayoría de las soluciones se localizan dentro del intervalo  $[1.1, 4.1]$ . Por tanto, cada frente de Pareto se ha dividido en cinco regiones cortando por el eje de riesgo  $x=1.1$ ;  $x=2.1$ ;  $x=3.1$  y  $x=4.1$ , de las cuales se han escogido los intervalos:

- $[1.1, 2.1]$  para el método de inclusión de la robustez como objetivo con estabilidad “Alta” (cap. 5), evaluación con remuestreo “R” (cap. 6), y marcado de riempo con remuestreo “R+T” (cap. 7).
- $[2.1, 3.1]$  para el método de inclusión de la robustez como objetivo con estabilidad “Media” (cap. 5)
- $[3.1, 4.1]$  para el método de inclusión de la robustez como objetivo con estabilidad “Baja” (cap. 5)

Las tablas 8.5-8.8 muestran los valores de los seis indicadores de calidad evaluados sobre las carteras contenidas en los intervalos correspondientes. Los campos mostrados aportan las diferentes medidas estadísticas aplicadas, nombrados de izquierda a derecha son: la media del valor de los frentes, su mediana, su varianza, el máximo y mínimo valor de indicador encontrado en el conjunto, el porcentaje de mejora de la media del conjunto señalado en la primera columna sobre la media de los frentes obtenidos a partir del algoritmo estándar y, por último, la mejora sobre la versión con matriz filtrada RMA (un valor negativo del campo indica que ha habido empeoramiento).

Recordar que las distancias euclídeas de riesgo de RMA son lógicamente superiores al resto de métodos, pues en su proceso de optimización se emplea

una matriz de varianzas-covarianzas filtrada que no se vuelve a utilizar ni en el resto de las técnicas, ni en la evaluación de los indicadores; por tanto, dicho  $ED_{\sigma^2}$  no será muy tenido en consideración en este apartado.

Tabla 8.5: SPEA2. Validación para el intervalo [1.1.2.1] en  $EE$ ,  $ST$ , y  $UR$ .

$EE$							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	0.7732	0.4627	0.9811	6.8720	0.0089		
Est	0.7665	0.4735	0.9340	6.8001	0.0061		
R+T	0.6943	0.3617	1.2389	9.6812	0.0006	9.42 %	10.21 %
Alta	0.7517	0.4703	0.8813	6.6800	0.0071	1.93 %	1.93 %
100g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	0.7717	0.4647	0.9706	6.9636	0.0079		
Est	0.7628	0.4717	0.9179	6.7417	0.0062		
R	0.6665	0.3886	1.0288	9.6624	0.0011	12.63 %	13.64 %
$ST$							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	2.3884	2.2630	1.8776	7.9458	0.5245		
Est	2.4552	2.3631	1.9690	8.4498	0.5573		
R+T	1.7014	1.4909	1.0999	8.6803	0.2856	30.70 %	28.77 %
Alta	2.4369	2.3255	1.9435	8.3633	0.5445	0.75 %	0.75 %
100g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	2.3889	2.2547	1.8745	7.4946	0.5329		
Est	2.4610	2.3421	2.0030	8.3381	0.5544		
R	1.8388	1.7049	1.1825	8.0692	0.3270	25.28 %	23.03 %
$UR$							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	2.1060	1.7286	1.8702	6.7386	0.2113		
Est	2.1448	1.7309	1.9664	7.3744	0.2086		
R+T	1.9369	1.6873	1.4938	7.7193	0.1167	9.70 %	8.03 %
Alta	2.1425	1.7351	1.9430	7.7841	0.1566	0.11 %	0.11 %
100g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	2.1083	1.7260	1.8795	6.7087	0.2061		
Est	2.1467	1.7210	1.9745	7.4165	0.2182		
R	1.9469	1.6871	1.2345	7.3051	0.1650	9.31 %	7.66 %

Las tablas 8.5 y 8.6 muestran los indicadores para las carteras con valores de rendimiento en el intervalo de riesgo [1.1,2.1] del frente global. Se puede ver cómo en esta región del frente el método RMA no consigue encontrar soluciones con menor  $EE$  y  $ER$  que la versión estándar, pero sí se observa una mejora por parte de los métodos propuestos.

Debido a que el estudio de frentes por rangos permite comparar carteras que posean un nivel de riesgo parecido, las diferencias entre los tres métodos robustos planteados y las versiones estándar y RMA para el intervalo mencionado son inferiores a si se consideran los frentes completos; esto ocurre porque, según se ha expuesto anteriormente, las soluciones más robustas suelen localizarse en una determinada región del frente, la cual se ha calculado que pertenece al intervalo  $[1.1, 2.1]$  estudiado. Aún así, los indicadores de los métodos “R”, “R+T” y “Alta” continúan siendo inferiores que los de “RMA” y “Est”, siendo la versión “R+T” la que mejor parece comportarse. Lo expuesto demuestra la superioridad de estas técnicas frente al método básico de optimización y RMA puesto que las carteras encontradas por el primer grupo, ante el mismo nivel del riesgo, continúan siendo más robustas.

A pesar de que, si se emplea el método de control inclusión de la robustez como objetivo, el conjunto interesante para el gestor de carteras es aquel que contiene soluciones con alta estabilidad, también se ha querido ver qué ocurre con el resto de estabildades; para ello, se estudia el intervalo  $[2.1, 3.1]$  por ser el que contiene mayor densidad de puntos en los frentes “Media”. Se puede observar como en dicha región, la versión que emplea la matriz filtrada es la que mayor robustez presenta en prácticamente todos los casos. Sin embargo, a pesar de que aquí ya se están tratando soluciones con estabilidad media, éstas siguen presentando mayor robustez que el método estándar de optimización empleado.

En el último conjunto, que contiene únicamente soluciones con baja estabilidad, ocurre lo esperado. Las carteras propocionadas por la técnica básica y RMA son más robustas que las contenidas en los frentes de “Baja”. Este hecho corrobora los principios sobre los que se basa el método que optimiza la robustez mediante un tercer objetivo.

Por último resulta interesante señalar que, si se tiene en cuenta que ‘RMA’ y ‘Est’ generan carteras uniformemente distribuidas a lo largo de todo el frente de Pareto sin contemplar la robustez de las mismas, es lógico observar cómo los valores de sus indicadores empeoran a medida que se aumenta el nivel de riesgo, ya que las soluciones serán más propensas a sufrir grandes desviaciones.

Tabla 8.6: SPEA2. Validación para el intervalo [1.1.2.1] en  $ER$ .  $ED_{E(R)}$  y  $ED_{\sigma^2}$ .

$ER$							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	1.3126	1.0875	1.2162	7.6140	0.1182		
Est	1.3054	1.0737	1.1536	7.4448	0.1026		
R+T	1.1093	0.7470	1.2593	8.5970	0.1193	15.03 %	15.49 %
Alta	1.2827	1.0343	1.0865	7.2977	0.0764	1.74 %	1.74 %
100g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	1.3132	1.0962	1.2066	7.7096	0.1116		
Est	1.3026	1.0711	1.1371	7.3903	0.0967		
R	1.0693	0.7835	1.0262	8.4346	0.0933	17.91 %	18.57 %

$ED_{E(R)}$							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	1.4166	1.1071	1.6884	9.9787	0.0912		
Est	1.4428	1.0965	1.8415	10.7114	0.0647		
R+T	1.2582	0.9131	1.5264	11.0643	0.0332	12.79 %	11.18 %
Alta	1.4329	1.0949	1.8057	11.1453	0.0705	0.69 %	0.69 %
100g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	1.4168	1.0971	1.6956	10.0063	0.0894		
Est	1.4413	1.0978	1.8456	10.7603	0.0650		
R	1.2841	1.0052	1.3482	10.4901	0.0795	10.91 %	9.36 %

$ED_{\sigma^2}$							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	0.0352	0.0280	0.0008	0.1423	0.0044		
Est	0.0105	0.0059	0.0006	0.2655	0.0005		
R+T	0.0092	0.0046	0.0006	0.2852	0.0003	12.94 %	73.97 %
Alta	0.0104	0.0058	0.0006	0.2773	0.0006	1.20 %	1.20 %
100g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	0.0354	0.0279	0.0008	0.1434	0.0045		
Est	0.0105	0.0059	0.0006	0.2665	0.0006		
R	0.0094	0.0049	0.0005	0.2673	0.0007	10.28 %	73.31 %

Tabla 8.7: SPEA2. Validación para el intervalo [2.1,3.1].

<i>EE</i>							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	1.8994	1.3035	3.2105	9.7332	0.0053		
Est	1.9302	1.4113	3.2573	9.7603	0.0025		
Media	1.9024	1.4511	3.1680	10.1434	0.0025	1.44 %	-0.16 %
<i>ST</i>							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	6.2788	6.1254	12.9464	21.1705	1.3050		
Est	6.3970	6.2645	13.3996	22.0602	1.3569		
Media	6.2805	6.3703	13.1742	24.6140	1.4483	1.82 %	-0.03 %
<i>UR</i>							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	3.2248	2.4884	6.6425	12.9012	0.1082		
Est	3.2803	2.5542	6.9068	14.0008	0.1329		
Media	3.2706	2.5415	6.9107	14.7832	0.1381	0.30 %	-1.42 %
<i>ER</i>							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	2.9090	2.5351	4.1922	9.9053	0.1959		
Est	2.9672	2.5902	4.2981	9.9375	0.1951		
Media	2.8828	2.4995	3.8021	10.4377	0.2058	2.84 %	0.90 %
<i>ED<sub>E(R)</sub></i>							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	2.4501	1.9181	5.3501	16.4512	0.0611		
Est	2.4976	1.9723	5.6948	17.5793	0.0595		
Media	2.4866	1.9537	5.7041	18.3911	0.0529	0.44 %	-1.49 %
<i>ED<sub><math>\sigma^2</math></sub></i>							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	0.0380	0.0233	0.0015	0.2613	0.0026		
Est	0.0176	0.0100	0.0018	0.4353	0.0002		
Media	0.0176	0.0098	0.0018	0.4525	0.0004	0.25 %	53.74 %

Tabla 8.8: SPEA2. Validación para el intervalo [3.1.4.1].

<i>EE</i>							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	3.8163	3.4756	11.1170	17.9101	0.0117		
Est	3.8731	3.5522	11.4271	18.1218	0.0040		
Baja	3.9765	3.5175	12.1681	18.0458	0.0042	-2.67 %	-4.20 %
<i>ST</i>							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	11.4459	11.3499	43.4681	39.8583	2.7123		
Est	11.5897	11.5461	43.8847	43.1357	2.4659		
Baja	11.7904	11.7415	46.1760	45.3728	2.9338	-1.73 %	-3.01 %
<i>UR</i>							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	4.2867	3.2555	13.0116	18.5238	0.0839		
Est	4.3243	3.2218	13.4885	19.6428	0.0820		
Baja	4.3628	3.3226	13.8902	20.7136	0.0753	-0.89 %	-1.77 %
<i>ER</i>							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	5.3758	4.6510	13.9353	18.3717	0.4204		
Est	5.4831	4.7150	14.8033	18.7192	0.4259		
Baja	5.5835	4.7924	14.8922	19.0310	0.4276	-1.83 %	-3.86 %
<i>ED<sub>E(R)</sub></i>							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	3.5014	2.7590	10.0618	22.2181	0.0707		
Est	3.5535	2.7950	10.6103	23.3586	0.0725		
Baja	3.6070	2.8304	11.0159	24.4643	0.0713	-1.51 %	-3.02 %
<i>ED<sub><math>\sigma^2</math></sub></i>							
300g	Media	Mediana	Var	Máx	Mín	Mej/Est	Mej/RMA
RMA	0.0469	0.0318	0.0023	0.3759	0.0013		
Est	0.0251	0.0130	0.0031	0.5620	0.0007		
Baja	0.0254	0.0132	0.0031	0.5803	0.0007	-1.10 %	45.87 %

## Capítulo 9

# Conclusions and Future Work

Portfolio managers often face the problem that the expected efficient frontier derived from their forecasts for future returns is subject to uncertainty, and this is one of the major reasons why some practitioners mistrust quantitative methods based on modern portfolio theory. Unfortunately, even though there are many approaches in the literature that solve the basic model introduced by Markowitz, there are very few ones that also accept real-world constraints. This number is reduced even further when robustness must be considered.

We think that the lack of robustness in portfolios may be due to the evolution process optimizing for just one scenario, the forecasted one. Therefore, portfolios might be hyper-specialized on it and become very sensitive to predictions. To avoid this, we suggested three robust strategies that optimize potential solutions in different feasible scenarios and favour those that consistently offer a good performance in different ways. The first one uses an explicit objective to measure the robustness, the second one handles the robustness implicitly and the third one adds a time-stamping mechanism. These approaches were designed to be adapted to different multiobjective evolutionary algorithms, and this is why they were tested on four different alternatives: SPEA2, NSGAI, SMPSO and GDE3. Moreover the three adaptations were compared with the standard formulation of the algorithms (classic mean-variance optimization without robustness control) and

another strategy studied in the state of the art (denoted as RMA). This last one, suggested by [Plerou et al., 2002], filters the variance-covariance matrix to remove those spurious correlations which do not provide useful information to estimate future parameters. Therefore predictions are more accurate and, in consequence, the optimized portfolios are more reliable. As it was expected, filtered matrix strategy outperforms the solutions based on the unfiltered estimates for the matrix.

Due to the fact that the traditional metrics used to evaluate Pareto fronts are not appropriate to quantify robustness in solutions, we have designed a set of five metrics able to evaluate different aspects related to portfolio robustness. They measure the estimation error, stability over different situations, return left to achieve the maximum potential return, performance in extreme risk scenarios, and euclidean distance for risk and return from forecasted to observed parameters.

## 9.1. Conclusions

A first step uses the multiobjective nature of portfolio optimization problem by adding a third explicit objective to evaluate robustness in solutions, where this objective is optimized at the same time as risk and return. Moreover, the solution fronts are split in three sets according to their stability (high, medium and low), keeping the non-dominated individuals in risk and return objectives. We can thereby conclude that the reasoning for this approach is correct; portfolios that are more sensitive to different scenarios are less reliable in practice and behave in an unexpected way. Therefore, the use of the third objective preserves those solutions that are more stable in different situations.

As the choice of a front from the three offered by the previous approach provides fewer and less diverse alternatives, we designed a second adaptation that handles robustness implicitly in the optimization process. With the evaluation of the portfolios in different feasible situations across the generations, the algorithm avoids getting all individuals specialized in a single scenario. Therefore, it retains the most stable solutions because the evolution process



discards those ones with worse risk/return trade-off.

Regarding to the previous approach, we thought that the fact that using the process of evaluating all the individuals under a new resampled scenario, which changes every generation, might alone have been enough to avoid overspecialized portfolios. However, some experiments showed that results were very dependent on the last iterations of the evolution process. We think this is due to the fact that in every generation some solutions from the previous population were replaced by new ones. If the last resampled scenarios were very extreme, a percentage of the best individuals that might have fared well over time, might have offered a poor performance and therefore were discarded. Furthermore this situation might have created new portfolios specialized on the last scenario, which would have substituted the old ones. When this happened during the first few generations, the specialized solutions would have been replaced over time. However, when this took place during the final rounds, some results were poor. The last developed adaptation solves the mentioned inconvenience using a time-stamp as a third explicit objective to keep track of the number of generations for which the individual has remained in the population. The maximization of this objective rewards good performance in previous generations and mitigates the risk described above.

The analysis of results across the chapters showed that our approaches are useful to generate portfolios, not only with good risk/return trade-off, but also robust to possible alterations in parameters. More specifically, high stability set of the first suggested adaptation is the one that in general provides the most robust portfolios. Moreover, its improvements over RMA and standard MOEAs are also the highest. As this set contains approximately one third of the solutions from the given final front, it is composed of fewer points than the rest of the robust approaches. We also observe that these portfolios are located around the same section of the efficient frontier. Unfortunately, investment needs may be different depending on the investors and the situation of the financial market. For instance, they might prefer to choose among a wider range of portfolios and also consider the ones that could provide higher returns, even if it comes at the cost of its risk and ro-

bustness. If that were the case, the most appropriate approach would be the time-stamping one as its solutions are slightly less stable but more diverse. Otherwise the first technique might be considered.

On the other hand, even if medium stability solutions from the first proposed approach and the evaluation with resampling strategy generate less robust portfolios than the previous adaptation, they can be also useful as robust asset allocators. Summarizing, high stability solutions of the technique that optimizes the robustness using a third objective and time-stamping strategy are the two most recommended approaches for robust asset allocation. They, together with SMPSO algorithm, produce reliable portfolios that not only present a good trade-off between the pair risk/return, but also are less sensitive to key parameters.

Regardless of the gain of robustness that the resampled alternatives achieve over the standard versions and RMA, these benefits are higher when SPEA2 and NSGA-II are used. We think it is due to both genetic algorithms tend to provide fronts that are slightly wider on the high-risk/high-return side of the efficient frontier than the ones offered by the rest of the standard MOEAs. Given that the portfolios located in that section are more prone to large deviations, this tends to result in a worse baseline. The resampled versions tend to both discard some of these solutions and find portfolios that are more robust than other algorithms. This is likely to make the improvement on a relative basis higher than average.

Therefore, the previous conclusions show that the four robust approaches studied in this thesis, adapted to MOEAs, increase the robustness in portfolios with regard to their standard versions. However, there is a big difference between the filtered matrix strategy (that filters the variance-covariance matrix) and the techniques with resampling, where the last ones are much more effective. All the reported differences observed in the metrics within the three core and RMA algorithms were statistically significant at the 1 % conventional level. There is just one exception that is significant at 5 %. Hence, we expect that this increase in reliability will help portfolio managers to feel more confident about automatic methods for portfolio optimization.

Finally, although both the control of real-world constraints and the adap-

tation of robust approaches to the basic MOEAs increase the computational cost, the increment is low in most of the cases. This is why we tried to take advantage of the resources of the algorithms (such as loops, functions, etc.) to insert the additional code, and we also respect the class structure of jMetal. Thus, the sum of all these factors mitigates the impact of the inclusion of these adaptations.

## 9.2. Future Work

Even though the results of this thesis are promising in terms of robustness, there are still several issues left open that could lead to future extensions of this work. Among them, a deeply segmented comparison might be interesting. Let us remember that at the same time we analysed the results, we also made an exploratory study by ranges. This study was carried out in order to get a first idea about the performance of the portfolios, in terms of the five evaluation metrics, with a similar risk level. However, only SPEA2 algorithm was used for this issue. Preliminary results were favourable to the suggested robust approaches. For this reason, we suggest extending the range analysis to the rest of the tested algorithms (NSGA-II, SMPSO and GDE3) and studying the performance of all of them in more detail.

Another interesting line of research would be the study of scalability. We think that it might be interesting to test the robust approaches using other data sets with a different number of assets indexes. Therefore, we suggest comparing the performance of portfolios optimized for different sets not only in terms of robustness, but also considering other properties.

Since the choice of metrics for evaluation purposes is a very important issue within the portfolio optimization problem, we recommend designing new metrics which are able to measure robustness from different points of view. This suggestion might open a broader discussion about the most appropriate way to evaluate robustness in portfolios and, in consequence, a new line of research.

Moreover, the performance analysis of the designed approaches over other MOEAs might be interesting. Since the experiments carried out showed that

the choice of the algorithm does affect the results, we suggest testing the techniques within more MOEAs related in the state of the art, such as IBEA [Zitzler and Künzli, 2004], MSOPS-II [Hughes, 2007] or MO-CMA-ES [Igel et al., 2007].

Finally, with the aim of approaching the optimization problem with regard to the real financial market, we think that it might be useful if the optimization methods handle more real-world constraints than the two experimented with. Among them we suggest controlling, for instance, some constraints associated to round-lot, transaction costs, taxation, floor, etc.

# Bibliografía

- Anagnostopoulos, K. P. and Mamanis, G.: 2011, The mean-variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms, *Expert Systems with Applications* .
- Barbosa, H. J. and Lemonge, A. C.: 2005, A genetic algorithm encoding for a class of cardinality constraints, *Proceedings of the 2005 conference on Genetic and evolutionary computation*, GECCO '05, ACM, New York, NY, USA, pp. 1193–1200.
- Bertsimas, D. and Sim, M.: 2004, The Price of Robustness, *OPERATIONS RESEARCH* **52**(1), 35–53.
- Castillo Tapia, M. and Coello, C.: 2007, Applications of multi-objective evolutionary algorithms in economics and finance: A survey, *CEC 2007*, Vol. 5467 of *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, IEEE, Singapore, pp. 532–539.
- Ceria, S. and Stubb, R. A.: 2006, Incorporating estimation errors into portfolio, *Journal of Asset Management* **7**(2), 109–127.
- Chiranjeevi, C. and Sastry, V. N.: 2007, Multi objective portfolio optimization models and its solution using genetic algorithms, *Computational Intelligence and Multimedia Applications, International Conference on* **1**, 453–457.
- Clerc, M. and Kennedy, J.: 2002, The particle swarm - explosion, stabi-

- lity, and convergence in a multidimensional complex space, *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on* **6**(1), 58–73.
- Coello, C. A. C.: 1998, A comprehensive survey of evolutionary-based multiobjective optimization techniques, *Knowledge and Information Systems* **1**, 269–308.
- Coello, C. A., Toscano, G. and Salazar, M. : 2004, Handling multiple objectives with particle swarm optimization, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* **8**(3), 256–279.
- Coello, C. and Lamont, G.: 2004a, *Applications of multi-objective evolutionary algorithms*, Advances in natural computation, World Scientific.
- Coello, C. and Lamont, G.: 2004b, *Financial Applications of multi-objective evolutionary algorithms*, Advances in natural computation, World Scientific.
- Corne, D. W., Jerram, N. R., Knowles, J. D., Oates, M. J. and J, M.: 2001, Pesa-ii: Region-based selection in evolutionary multiobjective optimization, *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO'2001)*, Morgan Kaufmann Publishers, pp. 283–290.
- Corne, D. W., Knowles, J. D. and Oates, M. J.: 2000, The pareto envelope-based selection algorithm for multiobjective optimization, *Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference*, Springer, pp. 839–848.
- Crama, Y. and Schyns, M.: 2003, Simulated annealing for complex portfolio selection problems, *European Journal of Operational Research* **150**(3), 546–571.
- Cura, T.: 2009, Particle swarm optimization approach to portfolio optimization, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* **10**(4), 2396 – 2406.
- Deb, K.: 1999, Evolutionary algorithms for multi-criterion optimization in engineering design.

- Deb, K.: 2001, *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S. and Meyarivan, T.: 2002, A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* **6**(2), 182–197.
- Deb, K., Steuer, R. E., Tewari, R. and Tewari, R.: 2011, Bi-objective portfolio optimization using a customized hybrid nsga-ii procedure, *EMO*, pp. 358–373.
- Durillo, J., Nebro, A. and Alba, E.: 2010, The jmetal framework for multi-objective optimization: Design and architecture, *CEC 2010*, Vol. 5467 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin / Heidelberg, Barcelona, Spain, pp. 4138–4325.
- Farrelly, T.: 2006, Asset allocation for robust portfolios, *The Journal of Investing Winter* **15**(4), 53–63.
- Fonseca, C. M. and Fleming, P. J.: 1993, Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization, *Genetic Algorithms: Proceedings of the Fifth International Conference*, Morgan Kaufmann, pp. 416–423.
- Global Portfolio Optimization*: 1992, *Financial Analysts Journal* **48**(5).
- Goldberg, D.: 1989, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. Boston, MA, USA.
- Golmakani, H. R. and Fazel, M.: 2011, Constrained portfolio selection using particle swarm optimization, *Expert Syst. Appl.* **38**(7), 8327–8335.
- Gregory, C., Darby-Dowman, K. and Mitra, G.: 2008, Robust optimization and portfolio selection: The cost of robustness, *European Journal of Operational Research* **212**(2), 417–428.

- Gupta, H. and Deb, K.: 2005, Handling constraints in robust multi-objective optimization, *Congress on Evolutionary Computation*, pp. 25–32.
- Halldorsson, B. V., Tütüncü, R. H. and Potra, F. A.: 2003, An interior-point method for a class of saddle-point problems, *Journal of Optimization Theory and Applications* pp. 559–590.
- Hanne, T.: 2007, A multiobjective evolutionary algorithm for approximating the efficient set, *European Journal of Operational Research* **176**(3), 1723–1734.  
**URL:** <http://ideas.repec.org/a/eee/ejores/v176y2007i3p1723-1734.html>
- Hassan, G.: 2008, Multiobjective robustness for portfolio optimization in volatile environments, *In Proc. GECCO '08*, ACM, pp. 1507–1514.
- Horn, J., Horn, J., Nafpliotis, N., Nafpliotis, N., Goldberg, D. E. and Goldberg, D. E.: 1994, A niched pareto genetic algorithm for multiobjective optimization, *In Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence*, pp. 82–87.
- Hughes, E. J.: 2007, Msops-ii: A general-purpose many-objective optimiser, *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2007, 25-28 September 2007, Singapore*, IEEE, pp. 3944–3951.
- Ibeth, O. G. S.: 2008, *El Modelo de Markowitz en la Teoria de Portafolios de Inversion*, PhD thesis, Instituto Politecnico Nacional.
- Idzorek, T. M.: 2006, Developing robust asset allocations, *Technical report*.
- Igel, C., Hansen, N. and Roth, S.: 2007, Covariance matrix adaptation for multi-objective optimization, *Evol. Comput.* **15**(1), 1–28.
- Jin, Y. and Sendhoff, B.: 2003, Trade-off between performance and robustness: An evolutionary multiobjective approach, *Proceedings of Second International Conference on Evolutionary Multi-criteria Optimization. LNCS 2632*, Springer, pp. 237–251.



- Kennedy, J. and Eberhart, R.: 1995, Particle swarm optimization, *Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference on*, Vol. 4, IEEE, pp. 1942–1948 vol.4.
- Knowles, J. and Corne, D.: 1999, The pareto archived evolution strategy: A new baseline algorithm for multiobjective optimization, *Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation*, IEEE Press, Piscataway, NJ, pp. 9–105.
- Kukkonen, S. and Lampinen, J.: 2005, GDE3: The third evolution step of generalized differential evolution, *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC'2005)*, pp. 443 – 450.
- Markowitz, H.: 1959, *Portfolio Selection: efficient diversification of investments*, John Wiley & Son.
- Markowitz, H. M.: 1952, Portfolio selection, *The Journal of Finance* **7**(1), 77–91.
- Mendel, G.: 1901, *Experiments in hybridisation*, Royal Horticultural Society.
- Mishra, S. K., Panda, G. and Meher, S.: 2009, *Multi-objective particle swarm optimization approach to portfolio optimization*, Vol. 10, Ieee, pp. 1612–1615.
- Moore, J. and Chapman, R.: 1999, Application of Particle Swarm to Multiobjective Optimization, *Technical report*, Departament of Computer Science and Software Engineering, Auburn University, Auburn.
- Nebro, A., Durillo, J., García-Nieto, J., Coello Coello, C., Luna, F. and Alba, E.: 2009, SMP SO: A new PSO-based metaheuristic for multi-objective optimization, *2009 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Multicriteria Decision-Making (MCDM 2009)*, IEEE Press, pp. 66–73.
- Osyczka, A.: 1985, *Multicriteria optimization for engineering design*, Academic Press, Cambridge.

- Perold, A.: 1984, Large-scale portfolio optimization, *Management Science* **30**(10), 1143–1160.
- Perret-Gentil, C. and Victoria-Feser, M. P.: 2003, Robust mean-variance portfolio selection, *Fame research paper series*, International Center for Financial Asset Management and Engineering.
- Pflug, G. and Wozabal, D.: 2007, Ambiguity in portfolio selection, *Quantitative Finance* **7**(4), 435–442.
- Plerou, V., Gopikrishnan, P., Rosenow, B., Amaral, L. A. N. and Stanley, H. E.: 2000, A random matrix theory approach to financial cross-correlations, **287**, 374–382.
- Plerou, V., Gopikrishnan, P., Rosenow, B., Amaral, L. A. N., Guhr, T. and Stanley, H. E.: 2002, A random matrix approach to cross-correlations in financial data, *Quantitative finance papers*, arXiv.org.
- Plerou, V., Gopikrishnan, P., Rosenow, B., Amaral, L. A. and Stanley, H. E.: 2000, Econophysics: financial time series from a statistical physics point of view, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **279**(1-4), 443–456.
- Plerou, V., Gopikrishnan, P., Rosenow, B., Amaral, L., Guhr, T. and Stanley, H. E.: 2001, Collective behavior of stock price movements - a random matrix approach, *Physica A* **299**, 175–180.
- Plerou, V., Gopikrishnan, P., Rosenow, B., Nunes Amaral, L. A. and Stanley, H. E.: 1999, Universal and nonuniversal properties of cross correlations in financial time series, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1471–1474.
- Radziukyniene, I. and Xilinskas, A.: 2008, Evolutionary methods for multi-objective portfolio optimization, in S. I. Ao, L. Gelman, D. W. Hukins, A. Hunter and A. M. Korsunsky (eds), *Proceedings of the World Congress on Engineering 2008 Vol II, WCE '08, July 2 - 4, 2008, London, U.K.*, Lecture Notes in Engineering and Computer Science, International Association of Engineers, Newswood Limited, pp. 1155–1159.

- Reilly, F. and Brown, C. K.: 1997, *Investment Analysis and Portfolio Management*, The Dryden Press.
- Reyes, M. and Coello, C. C.: 2005, Improving pso-based multi-objective optimization using crowding, mutation and  $\epsilon$ -dominance, in C. Coello, A. Hernández and E. Zitzler (eds), *Third International Conference on Evolutionary MultiCriterion Optimization, EMO 2005*, Vol. 3410 of *LNCS*, Springer, pp. 509–519.
- Reyes-sierra, M. and Coello, C. A. C.: 2006, Multi-objective particle swarm optimizers: A survey of the state-of-the-art, *International Journal Of Computational Intelligence Research* **2**(3), 287–308.
- Rocke, D. M.: 1996, Robustness properties of S-estimators of multivariate location and shape in high dimension, *The Annals of Statistics* **24**(3), 1327–1345.
- Rosenberg, R.: 1967, *Simulation of genetic populations with biochemical properties*, PhD thesis, Univ. Michigan.
- Ruppert, D.: 2006, Statistics and finance: An introduction, *Journal of the American Statistical Association* **101**, 849–850.
- Santamaria, D. P.: 2000, *Modelos Multicriterio para la Selección de Portafolios en la bolsa de Madrid*, PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia.
- Schaffer, J. D.: 1984, *Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms*, PhD thesis, Vanderbilt University.
- Schaffer, J. D.: 1985, Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms, *Proceedings of the 1st International Conference on Genetic Algorithms*, L. Erlbaum Associates Inc., Hillsdale, NJ, USA, pp. 93–100.
- Shiraishi, H.: 2008, Resampling procedure to construct value at risk efficient portfolios for stationary returns of assets, *Technical report*.

- Silverman, B. W.: 1986, *Density Estimation for Statistics and Data Analysis* (Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability), 1 edn, Chapman and Hall/CRC.
- Skolpadungket, P., Dahal, K. and Harnpornchai, N.: 2007, Portfolio optimization using multi-objective genetic algorithms, *Proceeding of 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pp. 516–523.
- Soleimani, H.: 2007, *Portfolio selection using genetic algorithm*, PhD thesis, Amirkabir University of Technology, Industrial Engineering Department, Tehran.
- Soleimani, H., Golmakani, H. R. and Salimi, M. H.: 2009, Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm, *Expert Syst. Appl.* **36**, 5058–5063.
- Srinivas, N. and Deb, K.: 1994, Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms, *Evolutionary Computation* **2**, 221–248.
- Streichert, F., Ulmer, H. and Zell, A.: 2003, Evolutionary algorithms and the cardinality constrained portfolio optimization problem, *Operations Research Proceedings 2003 Selected Papers of the International Conference on Operations Research* pp. 1–8.
- Subbu, R., Bonissone, P., Eklund, N., Bollapragada, S. and Chalermkraivuth, K.: 2005, Multiobjective financial portfolio design: a hybrid evolutionary approach, *Evolutionary Computation, 2005. The 2005 IEEE Congress on*, Vol. 2, pp. 1722 – 1729 Vol. 2.
- Takehara, H.: 1993, An interior point algorithm for large scale portfolio optimization, *Annals of Operations Research* **45**, 373–386. 10.1007/BF02282059.
- Thomson Reuters: 2012, Datastream.  
**URL:** [http://thomsonreuters.com/products\\_services/financial/financial\\_products/az/datastream/](http://thomsonreuters.com/products_services/financial/financial_products/az/datastream/)

- Tütüncü, R. H. and Koenig, M.: 2004, Robust asset allocation, *Annals OR* **132**(1-4), 157–187.
- Weismann, A., Parker, W. and Rönfeldt, H.: 1893, *The germ-plasm: a theory of heredity*, Contemporary science series, Readex Microprint Corporation.
- Wolfe, P.: 1957, *The simplex method for quadratic programming*, Rand Corp.
- Zhu, H., Wang, Y., Wang, K. and Chen, Y.: 2011, Particle swarm optimization (pso) for the constrained portfolio optimization problem, *Expert Syst. Appl.* **38**(8), 10161–10169.
- Zitzler, E. and Künzli, S.: 2004, Indicator-based selection in multiobjective search, in *Proc. 8th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature (PPSN VIII)*, Springer, pp. 832–842.
- Zitzler, E., Laumanns, M. and Bleuler, S.: 2004, A Tutorial on Evolutionary Multiobjective Optimization, in X. Gandibleux et al. (eds), *Metaheuristics for Multiobjective Optimisation*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer.
- Zitzler, E., Laumanns, M. and Thiele, L.: 2001, SPEA2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm, *Technical Report 103*, Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, Switzerland.
- Zitzler, E. and Thiele, L.: 1998, An evolutionary algorithm for multiobjective optimization: The strength pareto approach, *Technical Report 43*, Gloriasstrasse 35, CH-8092 Zurich, Switzerland.
- Zitzler, E. and Thiele, L.: 1999, Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength pareto approach.
- Zitzler, E., Thiele, L., Laumanns, M., Fonseca, C. M. and da Fonseca, V. G.: 2002, Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* **7**, 117–132.



# Apéndice A

## Related Publications

Garcia S., Quintana D., G. I. and P., I.: Portfolio Optimization using SPEA2 with Resampling, *Proceedings of the 12th International Conference on Intelligent Data Engineering and Automated Learning*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 127-134, 2011.

Garcia S., Quintana D., G. I. and P., I.: Time-stamped Resampling for Robust Evolutionary Portfolio Optimization, *Expert Systems with Applications*, 39(12), 10722-10730, 2012.

Garcia S., Quintana D., G. I. and P., I.: Multiobjective Algorithms with Resampling for Portfolio Optimization, *Computing and informatics*, 2012, In Press, Corrected Proof.

Garcia S., Quintana D., Galván I. and Isasi P.: Extended Mean-Variance Model for Reliable Evolutionary Portfolio Optimization, *AI Communications*. Under review, second round.





## Apéndice B

### Otros Resultados

Además de los resultados mostrados a lo largo del documento, para la elaboración de esta tesis doctoral se han ejecutado más experimentos que, para facilitar la legibilidad del documento, no han sido incluidos en la memoria. Parte de ellos se muestran en este capítulo.

Recordar que las siglas se corresponden con los seis indicadores de calidad definidos en el capítulo 4:

- $EE$ : Error de Estimación.
- $ST$ : Estabilidad.
- $UR$ : Rendimientos Inesperados.
- $ER$ : Riesgo Extremo.
- $ED_{E(R)}$ : Distancia Euclídea de Rendimiento.
- $ED_{\sigma^2}$ : Distancia Euclídea de Riesgo.

## B.1. Matriz Filtrada

Tabla B.1: Matriz Filtrada. 150 generaciones. 200 individuos. Indicadores de Calidad

$EE$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo
SPEA2 150g	2,4976	1,8435	4,9769	10,3121	0,0143
NSGAIH 150g	2,2832	1,7764	3,9449	10,1335	0,0257
SMP SO 150g	1,5380	1,2787	1,7429	10,3190	0,0261
GDE3 150g	1,5166	1,2295	1,6488	9,0723	0,0238
$ST$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo
SPEA2 150g	7,2596	6,9823	19,9728	34,6787	2,1026
NSGAIH 150g	6,4880	6,0847	12,8617	27,0553	2,0806
SMP SO 150g	5,2095	4,8383	7,1848	18,2820	0,7959
GDE3 150g	5,1307	4,8012	6,8927	19,0318	0,5799
$UR$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo
SPEA2 150g	3,5612	2,7829	8,3716	16,8384	0,1644
NSGAIH 150g	3,4804	2,7564	7,7567	16,9267	0,1708
SMP SO 150g	2,9751	2,5093	4,9719	13,3465	0,1153
GDE3 150g	3,3324	2,8597	5,7783	15,4700	0,2581
$ER$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo
SPEA2 150g	3,4851	3,0063	4,6887	10,6474	0,4309
NSGAIH 150g	3,2212	2,8444	3,8024	10,5519	0,4472
SMP SO 150g	2,2295	2,0114	1,8999	10,4154	0,2399
GDE3 150g	2,2022	1,9973	1,8402	8,9479	0,2362
$ED_{E(R)}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo
SPEA2 150g	2,8467	2,0892	6,9657	20,2830	0,1156
NSGAIH 150g	2,7297	1,9993	6,2542	19,3249	0,1428
SMP SO 150g	2,3417	1,6213	5,3123	18,1833	0,1009
GDE3 150g	2,3258	1,6176	5,2419	18,3606	0,0845
$ED_{\sigma^2}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo
SPEA2 150g	0,0422	0,0321	0,0015	0,3386	0,0049
NSGAIH 150g	0,0416	0,0321	0,0014	0,3238	0,0056
SMP SO 150g	0,0817	0,0821	0,0012	0,3399	0,0083
GDE3 150g	0,0817	0,0820	0,0012	0,3405	0,0070

## B.2. Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo

Tabla B.2: Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5).  
150 generaciones. 100. 200 y 500 individuos. *EE*.

<i>EE</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
NSGAI Estándar 100	2.2997	1.8126	3.9485	10.6896	0.0008		
NSGAI Estándar 200	2.2853	1.8263	3.9960	10.1990	0.0167		
NSGAI Estándar 500	2.2632	1.8071	3.9926	9.7996	0.0134		
NSGAI 100 Alta	0.8223	0.5477	1.0299	7.5333	0.0014	1.4774	64.24
NSGAI 100 Baja	4.5309	3.5408	18.8385	21.0165	0.0005	-2.2312	-97.02
NSGAI 100 Media	1.9499	1.4662	3.3837	11.6203	0.0006	0.3498	15.21
NSGAI 200 Alta	0.8263	0.5479	1.0549	7.8333	0.0117	1.4591	63.85
NSGAI 200 Baja	4.5067	3.5259	18.3770	20.6409	0.0066	-2.2214	-97.20
NSGAI 200 Media	1.9417	1.4521	3.4292	11.5117	0.0036	0.3436	15.03
NSGAI 500 Alta	0.8482	0.5391	1.2137	8.6212	0.0083	1.4150	62.52
NSGAI 500 Baja	4.4892	3.4894	18.3954	20.2897	0.0067	-2.2260	-98.35
NSGAI 500 Media	1.9558	1.4173	3.5690	10.0499	0.0038	0.3074	13.58
SMPSO Estándar 100	1.5193	1.3503	1.5116	7.5561	0.0105		
SMPSO Estándar 200	1.5215	1.3093	1.6422	9.2495	0.0019		
SMPSO Estándar 500	1.4907	1.2490	1.7705	12.1397	0.0282		
SMPSO 100 Alta	0.7596	0.5870	0.4751	5.6304	0.0002	0.7598	50.01
SMPSO 100 Baja	2.5431	2.2299	4.4690	11.6072	0.0193	-1.0238	-67.38
SMPSO 100 Media	1.3221	1.0744	1.2602	8.7224	0.0023	0.1972	12.98
SMPSO 200 Alta	0.7756	0.5763	0.6001	9.2768	3.61e-05	0.7459	49.02
SMPSO 200 Baja	2.4156	2.1216	4.2000	14.1106	0.0122	-0.8941	-58.76
SMPSO 200 Media	1.2674	0.9770	1.2474	6.1163	0.0005	0.2541	16.70
SMPSO 500 Alta	0.7958	0.5709	0.6474	8.4941	5.32e-05	0.6949	46.61
SMPSO 500 Baja	2.2602	1.8765	3.9467	12.0335	0.0233	-0.7695	-51.62
SMPSO 500 Media	1.2584	0.8790	1.3157	5.9279	0.0043	0.2323	15.58
SPEA2 Estándar 100	2.4949	1.8314	5.0292	10.4585	0.0009		
SPEA2 Estándar 200	2.4972	1.7786	5.0758	10.2291	0.0075		
SPEA2 Estándar 500	2.5111	1.7435	5.1603	10.0941	0.0067		
SPEA2 100 Alta	0.9461	0.6646	0.9952	10.2143	0.0017	1.5488	62.08
SPEA2 100 Baja	4.1212	3.1735	15.5202	19.6823	0.0004	-1.6263	-65.18
SPEA2 100 Media	1.9998	1.5317	3.4817	11.9666	0.0007	0.4952	19.85
SPEA2 200 Alta	0.9427	0.6431	1.1188	15.0698	0.0032	1.5544	62.25
SPEA2 200 Baja	4.1673	3.2456	15.9916	19.3930	0.0059	-1.6702	-66.88
SPEA2 200 Media	2.0211	1.5284	3.5294	9.8239	0.0034	0.4760	19.06
SPEA2 500 Alta	0.9779	0.6583	1.2191	13.3917	0.0077	1.5333	61.06
SPEA2 500 Baja	4.2529	3.2609	16.6605	19.2570	0.0060	-1.7418	-69.36
SPEA2 500 Media	2.1497	1.5591	4.3198	13.1168	0.0033	0.3614	14.39

Tabla B.3: Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5).  
150 generaciones. 100. 200 y 500 individuos.  $ST$ .

$ST$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
NSGAI Estándar 100	6.6008	6.1870	13.2936	27.2372	2.0857		
NSGAI Estándar 200	6.5429	6.1637	13.0338	29.9858	2.1947		
NSGAI Estándar 500	6.5172	6.1617	13.0398	27.2729	2.1127		
NSGAI 100 Alta	2.4343	2.2154	2.6159	21.7382	0.5184	4.1665	63.12
NSGAI 100 Baja	12.5522	11.5933	53.7832	63.4443	1.4451	-5.9514	-90.16
NSGAI 100 Media	5.9501	5.4466	10.3956	34.1995	1.6809	0.6506	9.86
NSGAI 200 Alta	2.4333	2.1870	2.3253	14.8856	0.5909	4.1096	62.81
NSGAI 200 Baja	12.5146	11.6138	53.6872	57.5514	1.2892	-5.9717	-91.27
NSGAI 200 Media	5.9157	5.4080	10.5038	27.9021	1.7817	0.6272	9.59
NSGAI 500 Alta	2.4660	2.1862	3.1274	32.4560	0.6275	4.0512	62.16
NSGAI 500 Baja	12.5030	11.6447	52.2102	55.1855	1.2604	-5.9858	-91.85
NSGAI 500 Media	5.9765	5.4957	11.0007	29.5892	1.8656	0.5407	8.30
SMP SO Estándar 100	5.2763	4.9447	7.4463	18.6016	0.5361		
SMP SO Estándar 200	5.2407	4.9652	7.0228	17.9278	0.6291		
SMP SO Estándar 500	5.1979	4.9189	6.8696	17.8510	1.2930		
SMP SO 100 Alta	2.9064	2.7308	2.8323	17.8189	0.3108	2.3699	44.92
SMP SO 100 Baja	8.1234	7.6093	18.1251	31.4707	0.8952	-2.8471	-53.96
SMP SO 100 Media	4.7927	4.5652	6.4377	16.4253	0.4247	0.4836	9.16
SMP SO 200 Alta	2.9011	2.7747	2.8507	18.4063	0.3115	2.3396	44.64
SMP SO 200 Baja	7.7305	7.3170	16.0548	26.5462	0.9431	-2.4898	-47.51
SMP SO 200 Media	4.6988	4.4993	6.5142	16.4018	0.3757	0.5419	10.34
SMP SO 500 Alta	3.0173	2.8536	3.3246	18.3436	0.3312	2.1807	41.95
SMP SO 500 Baja	7.2781	6.9204	14.0309	26.4470	0.8183	-2.0802	-40.02
SMP SO 500 Media	4.6724	4.4975	6.6103	16.2880	0.3633	0.5255	10.11
SPEA2 Estándar 100	7.2942	6.9842	19.4471	33.5883	1.8171		
SPEA2 Estándar 200	7.3282	7.0010	19.9614	34.8007	2.3580		
SPEA2 Estándar 500	7.3785	7.0260	21.3427	36.7863	2.1971		
SPEA2 100 Alta	3.0730	2.8793	4.1708	21.5621	0.6918	4.2212	57.87
SPEA2 100 Baja	11.6089	10.7972	47.5576	58.4683	1.6470	-4.3148	-59.15
SPEA2 100 Media	6.3628	5.9295	15.2312	35.7951	1.5109	0.9313	12.77
SPEA2 200 Alta	3.0601	2.8719	4.4481	32.3456	0.6687	4.2681	58.24
SPEA2 200 Baja	11.8334	11.2779	51.8985	56.2880	1.4648	-4.5051	-61.48
SPEA2 200 Media	6.4463	6.1856	16.5294	40.7202	1.6572	0.8820	12.04
SPEA2 500 Alta	3.1309	2.9673	5.0106	31.7083	0.6964	4.2476	57.57
SPEA2 500 Baja	12.1223	11.4928	55.8249	61.9148	1.9334	-4.7437	-64.29
SPEA2 500 Media	6.8214	6.5639	22.5111	45.9729	1.7144	0.5571	7.55

Tabla B.4: Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5).  
150 generaciones. 100. 200 y 500 individuos. *UR*.

<i>UR</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
NSGAI Estándar 100	3.4935	2.7269	7.7389	17.2267	0.1636		
NSGAI Estándar 200	3.4892	2.7210	7.8631	17.2200	0.1690		
NSGAI Estándar 500	3.4809	2.7324	7.9320	17.2562	0.1766		
NSGAI 100 Alta	2.2309	1.8385	2.3254	19.9974	0.1466	1.2626	36.14
NSGAI 100 Baja	4.5856	3.4344	16.1805	23.7709	0.0856	-1.0921	-31.26
NSGAI 100 Media	3.3666	2.6546	7.5771	17.9942	0.1612	0.1269	3.63
NSGAI 200 Alta	2.2428	1.8399	2.3460	17.5263	0.2054	1.2464	35.72
NSGAI 200 Baja	4.5909	3.5058	16.3579	23.6769	0.0915	-1.1016	-31.57
NSGAI 200 Media	3.3617	2.6270	7.7369	17.8405	0.1696	0.1275	3.66
NSGAI 500 Alta	2.2448	1.8404	2.3487	12.8547	0.2068	1.2360	35.51
NSGAI 500 Baja	4.5949	3.5137	16.5649	23.6260	0.0913	-1.1140	-32.00
NSGAI 500 Media	3.3662	2.6211	7.7996	18.2728	0.1721	0.1147	3.29
SMPSO Estándar 100	2.9843	2.4871	4.7301	13.1978	0.1206		
SMPSO Estándar 200	2.9902	2.4730	5.0647	13.2233	0.1193		
SMPSO Estándar 500	2.9788	2.4726	5.2033	15.2218	0.1168		
SMPSO 100 Alta	1.9518	1.6226	1.8242	10.1516	0.1140	1.0325	34.60
SMPSO 100 Baja	3.8058	3.0726	8.3465	16.3359	0.1351	-0.8215	-27.53
SMPSO 100 Media	2.7203	2.3156	4.0667	13.4154	0.0967	0.2640	8.85
SMPSO 200 Alta	1.9620	1.6154	1.8985	11.3615	0.1131	1.0282	34.38
SMPSO 200 Baja	3.7275	3.0095	8.1456	16.1125	0.0741	-0.7373	-24.66
SMPSO 200 Media	2.6798	2.2995	4.0192	12.7179	0.1044	0.3104	10.38
SMPSO 500 Alta	2.0223	1.6310	2.3941	11.2772	0.1467	0.9565	32.11
SMPSO 500 Baja	3.6242	2.9054	7.9292	15.9425	0.0998	-0.6454	-21.67
SMPSO 500 Media	2.6707	2.2557	4.2587	12.8180	0.1054	0.3081	10.34
SPEA2 Estándar 100	3.5693	2.7922	8.4483	17.4727	0.1559		
SPEA2 Estándar 200	3.5734	2.7806	8.5139	17.1715	0.1609		
SPEA2 Estándar 500	3.5791	2.7751	8.6437	17.3155	0.1650		
SPEA2 100 Alta	2.4109	1.9813	2.8246	12.4517	0.1760	1.1583	32.45
SPEA2 100 Baja	4.3807	3.3085	14.6714	22.2608	0.0867	-0.8114	-22.73
SPEA2 100 Media	3.3445	2.6870	7.4432	17.0860	0.1347	0.2248	6.30
SPEA2 200 Alta	2.3849	1.9443	2.8239	12.2361	0.1935	1.1886	33.26
SPEA2 200 Baja	4.3955	3.3251	14.8489	22.5280	0.0922	-0.8221	-23.01
SPEA2 200 Media	3.3563	2.6383	7.6499	17.5292	0.1477	0.2171	6.08
SPEA2 500 Alta	2.4137	1.9599	2.9945	11.5680	0.2167	1.1654	32.56
SPEA2 500 Baja	4.4337	3.3405	15.2359	22.6355	0.0880	-0.8545	-23.88
SPEA2 500 Media	3.4289	2.6747	8.2451	19.2232	0.1551	0.1502	4.20

Tabla B.5: Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5).  
150 generaciones. 100. 200 y 500 individuos. *ER*.

<i>ER</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
NSGAII Estándar 100	3.2617	2.8577	3.9892	11.2920	0.4098		
NSGAII Estándar 200	3.2445	2.8619	3.9709	10.7491	0.4217		
NSGAII Estándar 500	3.2170	2.8285	3.9091	10.2810	0.5179		
NSGAII 100 Alta	1.3288	0.9901	1.2010	9.7097	0.1580	1.9329	59.26
NSGAII 100 Baja	6.0977	5.1095	18.4974	20.6268	0.4505	-2.8360	-86.95
NSGAII 100 Media	2.8663	2.5100	3.5500	11.9566	0.2225	0.3954	12.12
NSGAII 200 Alta	1.3391	1.0012	1.1776	6.7950	0.1575	1.9054	58.73
NSGAII 200 Baja	6.0711	5.1162	17.9933	20.1858	0.5543	-2.8266	-87.12
NSGAII 200 Media	2.8639	2.5196	3.4947	11.1619	0.2171	0.3806	11.73
NSGAII 500 Alta	1.3591	1.0034	1.3311	8.5074	0.1555	1.8578	57.75
NSGAII 500 Baja	6.0519	5.1518	17.9058	19.7756	0.4914	-2.8349	-88.12
NSGAII 500 Media	2.8877	2.5196	3.5842	10.2690	0.2267	0.3292	10.23
SMP SO Estándar 100	2.2429	2.0326	1.7331	7.6994	0.1215		
SMP SO Estándar 200	2.2522	2.0030	1.8170	9.0102	0.2229		
SMP SO Estándar 500	2.2263	1.9839	1.8901	12.2460	0.1947		
SMP SO 100 Alta	1.2094	1.0307	0.6059	5.7088	0.0709	1.0335	46.08
SMP SO 100 Baja	3.5791	3.2285	5.3748	11.5991	0.1408	-1.3361	-59.57
SMP SO 100 Media	1.9809	1.7756	1.5621	8.4633	0.1104	0.2620	11.68
SMP SO 200 Alta	1.2467	1.0371	0.7222	10.0515	0.0627	1.0056	44.65
SMP SO 200 Baja	3.4221	3.0389	4.9648	14.1652	0.2426	-1.1699	-51.94
SMP SO 200 Media	1.9250	1.7374	1.5133	6.3360	0.0949	0.3272	14.53
SMP SO 500 Alta	1.2939	1.0668	0.7914	9.2233	0.0747	0.9324	41.88
SMP SO 500 Baja	3.2247	2.8692	4.3978	12.1824	0.2524	-0.9984	-44.84
SMP SO 500 Media	1.9173	1.6973	1.5590	6.6062	0.0648	0.3090	13.88
SPEA2 Estándar 100	3.4999	3.0082	4.9043	10.9786	0.4247		
SPEA2 Estándar 200	3.5068	3.0522	4.9153	10.7129	0.4333		
SPEA2 Estándar 500	3.5198	3.0425	4.9526	10.5152	0.4652		
SPEA2 100 Alta	1.5160	1.2432	1.2049	11.2117	0.1002	1.9839	56.69
SPEA2 100 Baja	5.5829	4.6230	15.0746	20.7962	0.4733	-2.0831	-59.52
SPEA2 100 Media	2.9385	2.5579	3.6564	13.1065	0.2345	0.5613	16.04
SPEA2 200 Alta	1.5204	1.2466	1.3442	16.2992	0.1266	1.9864	56.64
SPEA2 200 Baja	5.6367	4.6270	15.3971	20.8743	0.5249	-2.1299	-60.74
SPEA2 200 Media	2.9654	2.5684	3.6611	10.7182	0.2198	0.5414	15.44
SPEA2 500 Alta	1.5641	1.2782	1.4314	14.6058	0.1113	1.9557	55.56
SPEA2 500 Baja	5.7383	4.7761	15.9597	19.6419	0.2797	-2.2184	-63.03
SPEA2 500 Media	3.1108	2.6663	4.2901	14.3186	0.2533	0.4091	11.62

Tabla B.6: Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5).  
150 generaciones. 100. 200 y 500 individuos.  $ED_{E(R)}$

$ED_{E(R)}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
NSGAI Estándar 100	2.7522	2.0847	6.2893	19.6181	0.1160		
NSGAI Estándar 200	2.7442	2.0571	6.4213	19.6315	0.1276		
NSGAI Estándar 500	2.7295	2.0160	6.5030	19.6778	0.1237		
NSGAI 100 Alta	1.5128	1.1381	2.0772	22.6131	0.1038	1.2395	45.03
NSGAI 100 Baja	3.8160	2.9452	12.7868	26.5139	0.0267	-1.0637	-38.65
NSGAI 100 Media	2.5403	1.8540	6.1472	20.5247	0.0679	0.2119	7.70
NSGAI 200 Alta	1.5110	1.1198	2.0291	20.0719	0.1022	1.2332	44.94
NSGAI 200 Baja	3.8190	2.8505	13.0318	26.4358	0.0602	-1.0748	-39.17
NSGAI 200 Media	2.5345	1.8086	6.2700	20.3335	0.0646	0.2096	7.64
NSGAI 500 Alta	1.5138	1.1208	2.0535	15.0478	0.1037	1.2156	44.54
NSGAI 500 Baja	3.8152	2.7997	13.2478	26.3802	0.0698	-1.0858	-39.78
NSGAI 500 Media	2.5388	1.7808	6.3563	20.8461	0.0603	0.1907	6.99
SMPSO Estándar 100	2.3621	1.6453	5.0669	18.1158	0.1024		
SMPSO Estándar 200	2.3571	1.6202	5.3043	18.0436	0.0963		
SMPSO Estándar 500	2.3165	1.6095	5.3562	18.2761	0.0920		
SMPSO 100 Alta	1.6056	1.1775	2.5433	14.4616	0.0127	0.7565	32.03
SMPSO 100 Baja	3.0312	2.2798	8.1532	21.4031	0.0317	-0.6691	-28.33
SMPSO 100 Media	2.1965	1.5396	4.7658	18.3572	0.0772	0.1656	7.01
SMPSO 200 Alta	1.6023	1.1810	2.5952	13.5948	0.0083	0.7548	32.02
SMPSO 200 Baja	2.9581	2.2149	8.0100	21.1782	0.0252	-0.6010	-25.50
SMPSO 200 Media	2.1308	1.4798	4.6371	16.8926	0.0780	0.2264	9.60
SMPSO 500 Alta	1.6295	1.1927	2.8648	15.8985	0.0224	0.6870	29.66
SMPSO 500 Baja	2.8514	2.0601	7.8282	21.0132	0.0348	-0.5348	-23.09
SMPSO 500 Media	2.1153	1.4828	4.7708	17.3392	0.0679	0.2013	8.69
SPEA2 Estándar 100	2.8584	2.1194	7.1171	20.9909	0.1013		
SPEA2 Estándar 200	2.8586	2.0971	7.1498	20.6439	0.1058		
SPEA2 Estándar 500	2.8660	2.0907	7.3125	20.8022	0.0992		
SPEA2 100 Alta	1.6807	1.2568	2.4422	14.0692	0.0638	1.1777	41.20
SPEA2 100 Baja	3.6559	2.7688	12.0215	26.0719	0.0355	-0.7974	-27.90
SPEA2 100 Media	2.5676	1.9446	6.2096	20.6915	0.0544	0.2908	10.17
SPEA2 200 Alta	1.6617	1.2405	2.4765	15.6392	0.0888	1.1969	41.87
SPEA2 200 Baja	3.6720	2.7392	12.2488	26.3507	0.0559	-0.8133	-28.45
SPEA2 200 Media	2.5843	1.9020	6.4583	21.1948	0.0542	0.2743	9.60
SPEA2 500 Alta	1.6933	1.2573	2.7280	14.8933	0.0769	1.1727	40.92
SPEA2 500 Baja	3.7053	2.7167	12.6641	26.4638	0.0717	-0.8392	-29.28
SPEA2 500 Media	2.6558	1.9205	7.1842	22.9142	0.0558	0.2102	7.34

Tabla B.7: Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5).  
150 generaciones. 100. 200 y 500 individuos.  $ED_{\sigma^2}$ .

$ED_{\sigma^2}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
NSGAI Estándar 100	0.0198	0.0097	0.0018	0.4416	0.0016		
NSGAI Estándar 200	0.0199	0.0097	0.0019	0.4521	0.0017		
NSGAI Estándar 500	0.0198	0.0096	0.0019	0.4545	0.0018		
NSGAI 100 Alta	0.0110	0.0056	0.0007	0.5215	0.0009	0.0088	44.31
NSGAI 100 Baja	0.0268	0.0134	0.0029	0.5780	0.0008	-0.0070	-35.36
NSGAI 100 Media	0.0183	0.0093	0.0019	0.4798	0.0012	0.0015	7.39
NSGAI 200 Alta	0.0109	0.0055	0.0007	0.4841	0.0007	0.0089	44.99
NSGAI 200 Baja	0.0271	0.0134	0.0032	0.5758	0.0008	-0.0072	-36.24
NSGAI 200 Media	0.0184	0.0093	0.0020	0.4889	0.0010	0.0015	7.61
NSGAI 500 Alta	0.0110	0.0056	0.0007	0.3556	0.0008	0.0088	44.59
NSGAI 500 Baja	0.0272	0.0132	0.0034	0.5786	0.0009	-0.0074	-37.29
NSGAI 500 Media	0.0183	0.0094	0.0020	0.4960	0.0007	0.0015	7.45
SMP SO Estándar 100	0.0172	0.0086	0.0016	0.4373	0.0016		
SMP SO Estándar 200	0.0172	0.0085	0.0016	0.4364	0.0011		
SMP SO Estándar 500	0.0169	0.0085	0.0017	0.4440	0.0010		
SMP SO 100 Alta	0.0120	0.0064	0.0010	0.3730	0.0005	0.0052	30.33
SMP SO 100 Baja	0.0215	0.0107	0.0023	0.4954	0.0009	-0.0044	-25.44
SMP SO 100 Media	0.0160	0.0080	0.0016	0.4407	0.0001	0.0012	6.90
SMP SO 200 Alta	0.0118	0.0064	0.0009	0.3316	0.0004	0.0054	31.26
SMP SO 200 Baja	0.0212	0.0105	0.0023	0.4956	0.0009	-0.0040	-23.18
SMP SO 200 Media	0.0154	0.0078	0.0015	0.4193	0.0009	0.0018	10.24
SMP SO 500 Alta	0.0120	0.0065	0.0010	0.4009	0.0003	0.0049	28.84
SMP SO 500 Baja	0.0206	0.0102	0.0023	0.4969	0.0010	-0.0038	-22.27
SMP SO 500 Media	0.0153	0.0077	0.0016	0.4285	0.0007	0.0016	9.40
SPEA2 Estándar 100	0.0206	0.0101	0.0020	0.4816	0.0015		
SPEA2 Estándar 200	0.0207	0.0103	0.0020	0.4738	0.0016		
SPEA2 Estándar 500	0.0208	0.0103	0.0021	0.4779	0.0016		
SPEA2 100 Alta	0.0122	0.0064	0.0008	0.3500	0.0007	0.0084	40.95
SPEA2 100 Baja	0.0258	0.0128	0.0030	0.5806	0.0007	-0.0052	-25.17
SPEA2 100 Media	0.0184	0.0095	0.0020	0.4933	0.0010	0.0022	10.77
SPEA2 200 Alta	0.0120	0.0064	0.0009	0.3803	0.0008	0.0086	41.75
SPEA2 200 Baja	0.0261	0.0128	0.0031	0.5822	0.0008	-0.0054	-26.32
SPEA2 200 Media	0.0186	0.0095	0.0021	0.5014	0.0008	0.0021	10.16
SPEA2 500 Alta	0.0123	0.0064	0.0010	0.3671	0.0007	0.0085	40.68
SPEA2 500 Baja	0.0264	0.0129	0.0033	0.5848	0.0008	-0.0056	-27.06
SPEA2 500 Media	0.0193	0.0097	0.0024	0.5313	0.0004	0.0015	7.32



Tabla B.8: Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5).  
300 generaciones. 100. 200 y 500 individuos. *EE* y *ST*.

<i>EE</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
NSGAI Estándar 100	2.3085	1.8162	4.0051	10.2655	0.0186		
NSGAI Estándar 500	2.2613	1.8071	3.9781	9.7755	0.0144		
NSGAI 100 Alta	0.8256	0.5391	1.0369	8.7942	0.0014	1.4829	64.24
NSGAI 100 Baja	4.5609	3.5490	19.0357	21.1552	0.0005	-2.2524	-97.57
NSGAI 100 Media	1.9515	1.5128	3.4088	12.0476	0.0006	0.3570	15.46
NSGAI 500 Alta	0.8552	0.5476	1.2301	8.4322	0.0087	1.4061	62.18
NSGAI 500 Baja	4.4824	3.5064	18.4418	20.2969	0.0066	-2.2211	-98.22
NSGAI 500 Media	1.9571	1.4398	3.5982	10.6776	0.0038	0.3042	13.45
SMPSO Estándar 100	1.5422	1.3459	1.6191	9.0421	0.0140		
SMPSO Estándar 500	1.4939	1.2324	1.7256	13.4899	0.0253		
SMPSO 100 Alta	0.7710	0.5876	0.5244	6.4918	0.0013	0.7712	50.01
SMPSO 100 Baja	2.5366	2.2123	4.4345	12.0155	0.0020	-0.9944	-64.48
SMPSO 100 Media	1.3198	1.0558	1.2694	6.4022	0.0079	0.2224	14.42
SMPSO 500 Alta	0.7833	0.5653	0.6444	8.1778	0.0002	0.7105	47.56
SMPSO 500 Baja	2.2601	1.8619	3.8843	9.7533	0.0264	-0.7662	-51.29
SMPSO 500 Media	1.2572	0.8997	1.3058	5.6075	5.08e-05	0.2367	15.84
SPEA2 Estándar 100	2.5151	1.8400	5.1104	10.4459	0.0071		
SPEA2 Estándar 500	2.5196	1.8162	5.1751	10.1081	0.0066		
SPEA2 100 Alta	0.9392	0.6639	1.0053	7.7247	0.0032	1.5759	62.66
SPEA2 100 Baja	4.1604	3.2092	15.6947	19.9292	0.0004	-1.6453	-65.41
SPEA2 100 Media	2.0097	1.5757	3.4421	10.2422	0.0009	0.5054	20.10
SPEA2 500 Alta	0.9728	0.6612	1.1615	7.7657	0.0067	1.5468	61.39
SPEA2 500 Baja	4.2668	3.2502	16.8587	18.9691	0.0059	-1.7472	-69.34
SPEA2 500 Media	2.1647	1.5713	4.5098	14.8008	0.0033	0.3549	14.08
<i>ST</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
NSGAI Estándar 100	6.6015	6.1866	13.2826	27.3433	2.0247		
NSGAI Estándar 500	6.5078	6.1306	13.0883	26.9369	2.0019		
NSGAI 100 Alta	2.4205	2.1862	2.9921	37.2104	0.5030	4.1809	63.33
NSGAI 100 Baja	12.5533	11.5633	49.5109	52.1249	2.0957	-5.9518	-90.16
NSGAI 100 Media	5.9663	5.5317	10.8071	39.2361	1.8167	0.6351	9.62
NSGAI 500 Alta	2.4544	2.1776	3.0389	30.2851	0.5702	4.0533	62.28
NSGAI 500 Baja	12.5017	11.5861	53.7514	58.9239	0.8903	-5.9940	-92.10
NSGAI 500 Media	5.9585	5.5172	10.6824	31.7071	1.7402	0.5492	8.44
SMPSO Estándar 100	5.2941	5.0380	7.3206	19.4461	0.4926		
SMPSO Estándar 500	5.2076	4.8454	7.0554	17.4739	0.5596		
SMPSO 100 Alta	2.8896	2.7731	2.6310	14.9312	0.2987	2.4045	45.42
SMPSO 100 Baja	8.1178	7.5185	18.4035	32.4833	0.6013	-2.8237	-53.34
SMPSO 100 Media	4.7647	4.5202	6.3975	17.3765	0.4626	0.5294	10.00
SMPSO 500 Alta	3.0024	2.8704	3.2818	17.4724	0.3107	2.2051	42.34
SMPSO 500 Baja	7.3058	6.9150	14.2757	25.5891	1.1800	-2.0983	-40.29
SMPSO 500 Media	4.6477	4.4942	6.8145	18.4801	0.3550	0.5599	10.75
SPEA2 Estándar 100	7.3817	7.0365	20.5659	35.4782	2.0131		
SPEA2 Estándar 500	7.4009	7.0380	20.8347	35.4924	2.1680		
SPEA2 100 Alta	3.0709	2.8514	4.3478	29.2287	0.6791	4.3108	58.40
SPEA2 100 Baja	11.7115	11.0126	48.2307	61.3438	2.3003	-4.3297	-58.65
SPEA2 100 Media	6.4148	6.1342	16.1464	45.2995	1.5818	0.9669	13.10
SPEA2 500 Alta	3.1078	3.0030	4.2548	30.2219	0.6848	4.2932	58.01
SPEA2 500 Baja	12.2101	11.6820	58.2003	58.3016	1.9495	-4.8092	-64.98
SPEA2 500 Media	6.8711	6.6110	23.2160	43.6162	1.7689	0.5298	7.16

Tabla B.9: Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5).  
300 generaciones. 100. 200 y 500 individuos. *UR* y *ER*.

<i>UR</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
NSGAI Estándar 100	3.4944	2.7394	7.7496	17.5181	0.1633		
NSGAI Estándar 500	3.4788	2.7252	7.9201	17.2441	0.1783		
NSGAI 100 Alta	2.2386	1.8363	2.2079	11.3600	0.1731	1.2558	35.94
NSGAI 100 Baja	4.5969	3.4469	16.3986	23.4361	0.0863	-1.1025	-31.55
NSGAI 100 Media	3.3702	2.6506	7.5618	17.8277	0.1556	0.1243	3.56
NSGAI 500 Alta	2.2549	1.8070	2.4815	16.3998	0.1541	1.2239	35.18
NSGAI 500 Baja	4.5720	3.4988	16.3517	23.7404	0.0915	-1.0932	-31.43
NSGAI 500 Media	3.3731	2.6246	7.8785	17.7953	0.1651	0.1057	3.04
SMP SO Estándar 100	2.9983	2.4818	4.8749	13.4350	0.1372		
SMP SO Estándar 500	2.9953	2.4891	5.3718	13.6484	0.1163		
SMP SO 100 Alta	1.9510	1.6331	1.7678	10.2495	0.1278	1.0473	34.93
SMP SO 100 Baja	3.8166	3.0845	8.4074	16.2824	0.1378	-0.8184	-27.29
SMP SO 100 Media	2.7245	2.3224	4.1184	12.9618	0.0939	0.2738	9.13
SMP SO 500 Alta	2.0050	1.6210	2.2323	11.8478	0.1447	0.9903	33.06
SMP SO 500 Baja	3.6269	2.9441	7.9522	16.3817	0.1070	-0.6316	-21.09
SMP SO 500 Media	2.6522	2.2159	4.2466	13.0895	0.1048	0.3431	11.46
SPEA2 Estándar 100	3.5820	2.7871	8.4906	17.3489	0.1568		
SPEA2 Estándar 500	3.5859	2.7953	8.6577	17.1964	0.1640		
SPEA2 500 Alta	2.4227	1.9344	3.0680	14.3485	0.2050	1.1632	32.44
SPEA2 500 Baja	4.4276	3.3342	15.1664	22.5427	0.0827	-0.8417	-23.47
SPEA2 500 Media	3.4308	2.6553	8.2769	19.1503	0.1577	0.1551	4.32
<i>ER</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
NSGAI Estándar 100	3.2704	2.8821	4.0447	10.9086	0.4118		
NSGAI Estándar 500	3.2148	2.8235	3.8975	10.2510	0.4512		
NSGAI 100 Alta	1.3264	0.9937	1.1512	8.9343	0.1527	1.9440	59.44
NSGAI 100 Baja	6.1372	5.1272	18.6247	20.5402	0.2941	-2.8668	-87.66
NSGAI 100 Media	2.8680	2.4980	3.5508	13.1293	0.2348	0.4024	12.30
NSGAI 500 Alta	1.3698	0.9921	1.4225	12.1651	0.1520	1.8450	57.39
NSGAI 500 Baja	6.0394	5.1410	17.8083	19.9945	0.3124	-2.8247	-87.86
NSGAI 500 Media	2.8853	2.4970	3.6323	11.7281	0.2030	0.3295	10.25
SMP SO Estándar 100	2.2743	2.0864	1.8380	9.3156	0.1458		
SMP SO Estándar 500	2.2303	1.9779	1.8379	13.6113	0.1971		
SMP SO 100 Alta	1.2207	1.0295	0.6428	7.1572	0.0520	1.0536	46.33
SMP SO 100 Baja	3.5712	3.2158	5.3274	11.9189	0.0441	-1.2969	-57.02
SMP SO 100 Media	1.9749	1.7634	1.5684	7.2431	0.1160	0.2994	13.16
SMP SO 500 Alta	1.2783	1.0606	0.7799	8.9022	0.0740	0.9520	42.68
SMP SO 500 Baja	3.2222	2.8560	4.3720	10.6435	0.2733	-0.9919	-44.47
SMP SO 500 Media	1.9138	1.6934	1.5509	5.8567	0.0580	0.3165	14.19
SPEA2 Estándar 100	3.5231	3.0392	4.9719	10.9751	0.4222		
SPEA2 Estándar 500	3.5315	3.0472	4.9711	10.5238	0.5447		
SPEA2 100 Alta	1.5035	1.2272	1.1745	8.0784	0.1247	2.0196	57.32
SPEA2 100 Baja	5.6303	4.6557	15.2605	19.5340	0.4971	-2.1072	-59.81
SPEA2 100 Media	2.9481	2.5616	3.6457	10.4631	0.2204	0.5749	16.32
SPEA2 500 Alta	1.5619	1.2908	1.3792	8.6361	0.1193	1.9696	55.77
SPEA2 500 Baja	5.7537	4.7991	16.1113	19.9501	0.3959	-2.2222	-62.92
SPEA2 500 Media	3.1249	2.6428	4.4860	16.0735	0.2644	0.4066	11.51

Tabla B.10: Método de Inclusión de la Robustez como Objetivo (capítulo 5).  
300 generaciones. 100. 200 y 500 individuos.  $ED_{E(R)}$  y  $ED_{\sigma^2}$ .

$ED_{E(R)}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
NSGAI Estándar 100	2.7586	2.0887	6.2987	19.9708	0.1304		
NSGAI Estándar 500	2.7288	2.0203	6.4921	19.6591	0.1302		
NSGAI 100 Alta	1.5108	1.1374	1.9255	13.6244	0.0884	1.2478	45.23
NSGAI 100 Baja	3.8316	2.9426	12.9435	26.1626	0.0225	-1.0730	-38.90
NSGAI 100 Media	2.5435	1.8619	6.1299	20.3831	0.0652	0.2150	7.80
NSGAI 500 Alta	1.5192	1.1135	2.0239	12.1863	0.0958	1.2096	44.33
NSGAI 500 Baja	3.8071	2.7932	13.1809	26.5019	0.0747	-1.0784	-39.52
NSGAI 500 Media	2.5400	1.7864	6.4269	20.3429	0.0571	0.1888	6.92
SMPSO Estándar 100	2.3789	1.6414	5.2605	17.9790	0.0959		
SMPSO Estándar 500	2.3200	1.6212	5.3737	18.5834	0.0915		
SMPSO 100 Alta	1.6199	1.1807	2.5924	15.0434	0.0678	0.7590	31.91
SMPSO 100 Baja	3.0312	2.2764	8.1637	21.3472	0.0448	-0.6523	-27.42
SMPSO 100 Media	2.1962	1.5226	4.7703	17.9081	0.0672	0.1827	7.68
SMPSO 500 Alta	1.6096	1.1811	2.7126	14.4413	0.0440	0.7104	30.62
SMPSO 500 Baja	2.8498	2.0748	7.7739	20.9103	0.0407	-0.5298	-22.83
SMPSO 500 Media	2.1082	1.4585	4.7702	17.9511	0.0078	0.2118	9.13
SPEA2 Estándar 100	2.8700	2.1222	7.1529	20.8498	0.1108		
SPEA2 Estándar 500	2.8709	2.1006	7.3153	20.6679	0.1117		
SPEA2 100 Alta	1.6689	1.2534	2.3988	14.0039	0.0623	1.2011	41.85
SPEA2 100 Baja	3.6705	2.8050	12.0305	26.1557	0.0472	-0.8005	-27.89
SPEA2 100 Media	2.5795	1.9185	6.2832	21.9771	0.0625	0.2906	10.12
SPEA2 500 Alta	1.6971	1.2701	2.8010	17.8580	0.0901	1.1738	40.89
SPEA2 500 Baja	3.7051	2.7167	12.5571	26.3669	0.0730	-0.8342	-29.06
SPEA2 500 Media	2.6615	1.9156	7.2368	22.8490	0.0493	0.2094	7.29
$ED_{\sigma^2}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
NSGAI Estándar 100	0.0198	0.0097	0.0017	0.4600	0.0016		
NSGAI Estándar 500	0.0198	0.0096	0.0019	0.4528	0.0018		
NSGAI 100 Alta	0.0109	0.0055	0.0007	0.3342	0.0007	0.0090	45.32
NSGAI 100 Baja	0.0269	0.0133	0.0030	0.5747	0.0008	-0.0071	-35.63
NSGAI 100 Media	0.0183	0.0093	0.0019	0.4832	0.0012	0.0015	7.72
NSGAI 500 Alta	0.0110	0.0055	0.0007	0.2999	0.0008	0.0089	44.74
NSGAI 500 Baja	0.0270	0.0131	0.0033	0.5783	0.0009	-0.0072	-36.32
NSGAI 500 Media	0.0185	0.0093	0.0021	0.4945	0.0005	0.0014	6.81
SMPSO Estándar 100	0.0173	0.0086	0.0016	0.4353	0.0016		
SMPSO Estándar 500	0.0169	0.0085	0.0017	0.4506	0.0012		
SMPSO 100 Alta	0.0121	0.0064	0.0010	0.3838	0.0007	0.0053	30.34
SMPSO 100 Baja	0.0215	0.0107	0.0023	0.4971	0.0009	-0.0042	-24.49
SMPSO 100 Media	0.0160	0.0080	0.0016	0.4387	0.0001	0.0013	7.32
SMPSO 500 Alta	0.0119	0.0065	0.0010	0.3599	5.30e-05	0.0050	29.68
SMPSO 500 Baja	0.0206	0.0103	0.0023	0.4956	0.0010	-0.0037	-21.85
SMPSO 500 Media	0.0153	0.0077	0.0016	0.4351	1.97e-05	0.0016	9.21
SPEA2 Estándar 100	0.0207	0.0102	0.0020	0.4782	0.0014		
SPEA2 Estándar 500	0.0208	0.0103	0.0021	0.4742	0.0016		
SPEA2 100 Alta	0.0120	0.0064	0.0008	0.3299	0.0008	0.0087	42.16
SPEA2 100 Baja	0.0259	0.0129	0.0030	0.5803	0.0008	-0.0052	-25.12
SPEA2 100 Media	0.0184	0.0095	0.0020	0.5213	0.0011	0.0023	10.96
SPEA2 500 Alta	0.0124	0.0064	0.0010	0.4383	0.0007	0.0084	40.36
SPEA2 500 Baja	0.0264	0.0130	0.0033	0.5818	0.0007	-0.0055	-26.63
SPEA2 500 Media	0.0193	0.0097	0.0024	0.5293	0.0004	0.0015	7.33

### B.3. Método de Evaluación con Remuestreo

Tabla B.11: Método de Evaluación con Remuestreo. SPEA2 sin restricciones. 50, 100 y 200 individuos.

<i>EE</i>	<b>R-50</b>	<b>Estándar-50</b>	<b>R-100</b>	<b>Estándar-100</b>	<b>R-200</b>	<b>Estándar-200</b>
Average	3.58389	3.62739	3.58586	3.75097	3.61118	3.76668
Median	3.75999	3.84983	3.77780	3.92876	3.80308	3.94310
Variance	0.18572	0.22016	0.19541	0.16160	0.19780	0.15766
Maximum value	3.94303	3.95819	3.96495	3.97959	3.97590	3.98965
Minimum Value	1.83713	1.84397	1.80752	2.03810	1.82528	2.07942
<i>HV</i>	<b>R-50</b>	<b>Estándar-50</b>	<b>R-100</b>	<b>Estándar-100</b>	<b>R-200</b>	<b>Estándar-200</b>
Average	0.51551	0.50941	0.47368	0.50176	0.47223	0.49715
Median	0.53966	0.45816	0.42839	0.45258	0.42656	0.44895
Variance	0.01767	0.01728	0.01700	0.01645	0.01679	0.01616
Maximum value	0.77764	0.78560	0.74998	0.76184	0.74420	0.75424
Minimum Value	0.22626	0.30859	0.24046	0.30668	0.23544	0.30320
<i>SPREAD</i>	<b>R-50</b>	<b>Estándar-50</b>	<b>R-100</b>	<b>Estándar-100</b>	<b>R-200</b>	<b>Estándar-200</b>
Average	0.89554	0.80186	0.88501	0.47855	0.88513	0.46028
Median	0.89228	0.79946	0.88210	0.49075	0.87906	0.47166
Variance	0.00715	0.01020	0.00997	0.00909	0.01034	0.00951
Maximum value	1.22227	1.11792	1.33979	0.64023	1.43464	0.61230
Minimum Value	0.57814	0.49306	0.59058	0.25040	0.52798	0.22788

Tabla B.12: Método de Evaluación con Remuestreo (capítulo 6). 100 generaciones. 50 y 500 individuos.  $EE$  y  $ST$

$EE$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 50	1.5246	1.3433	1.4627	7.0264	0.0002		
GDE3 Estándar 500	1.4732	1.2024	1.6291	7.8057	0.0198		
GDE3 R 50	1.2141	0.9927	1.0223	7.7559	0.0054	0.3105	20.36
GDE3 R 500	1.1511	0.8876	0.9979	9.6517	0.0014	0.3221	21.86
NSGAI Estándar 50	2.3301	1.8622	4.1566	11.1235	0.0009		
NSGAI Estándar 500	2.2676	1.8211	4.0113	9.8256	0.0130		
NSGAI R 50	1.6637	1.2070	2.4194	13.9228	0.0010	0.6664	28.60
NSGAI R 500	1.6993	1.1580	2.7568	13.1419	0.0119	0.5683	25.06
SMPSO Estándar 50	1.5469	1.3784	1.5103	8.3417	0.0028		
SMPSO Estándar 500	1.4887	1.1990	1.7256	9.3250	0.0206		
SMPSO R 50	1.2473	1.0281	0.9825	7.5532	4.02e-05	0.2996	19.37
SMPSO R 500	1.1766	0.9239	0.9570	7.4729	0.0004	0.3121	20.96
SPEA2 Estándar 50	2.4083	1.8360	4.7000	11.3616	0.0009		
SPEA2 Estándar 500	2.4946	1.7243	5.1336	10.2118	0.0066		
SPEA2 R 50	1.4603	1.0373	1.9955	12.4067	0.0047	0.9480	39.36
SPEA2 R 500	1.4739	0.9675	2.2580	10.1439	0.0089	1.0207	40.92
$ST$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 50	5.3147	5.0597	7.7614	19.5353	0.4573		
GDE3 Estándar 500	5.1563	4.8002	6.9654	18.3609	1.1487		
GDE3 R 50	4.2278	3.7894	5.3870	16.4660	0.4130	1.0869	20.45
GDE3 R 500	4.0055	3.4655	4.6793	14.6948	0.3625	1.1508	22.32
NSGAI Estándar 50	6.6418	6.2004	13.5961	29.3069	1.9201		
NSGAI Estándar 500	6.4940	6.1164	12.6961	26.9499	2.1447		
NSGAI R 50	4.6624	4.1510	6.0359	22.9624	0.5935	1.9795	29.80
NSGAI R 500	4.5187	3.9944	5.4741	28.9869	0.5440	1.9753	30.42
SMPSO Estándar 50	5.3702	5.0468	7.8679	19.1745	0.4803		
SMPSO Estándar 500	5.1792	4.8551	7.0221	18.6789	0.5674		
SMPSO R 50	4.3095	3.9009	5.2233	17.4593	0.2804	1.0607	19.75
SMPSO R 500	3.9839	3.5501	4.0817	17.8020	0.3987	1.1953	23.08
SPEA2 Estándar 50	7.1077	6.7981	17.3649	37.0521	1.6528		
SPEA2 Estándar 500	7.3012	6.9573	19.8720	34.4751	2.2232		
SPEA2 R 50	4.0681	3.5985	4.8915	19.6508	0.4451	3.0396	42.77
SPEA2 R 500	3.8625	3.4570	3.7162	17.1120	0.4633	3.4387	47.10

Tabla B.13: Método de Evaluación con Remuestreo (capítulo 6). 100 generaciones. 50 y 500 individuos. *UR* y Riesgo Extremos.

<i>UR</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 50	3.3624	2.9138	5.3101	14.2475	0.2884		
GDE3 Estándar 500	3.3593	2.8894	6.2123	15.0614	0.2784		
GDE3 R 50	2.9500	2.5171	4.0662	14.5313	0.2163	0.4125	12.27
GDE3 R 500	2.9078	2.4781	4.0970	13.1745	0.2081	0.4514	13.44
NSGAI Estándar 50	3.5165	2.7209	7.7446	17.3704	0.1484		
NSGAI Estándar 500	3.4841	2.7271	7.9513	17.2020	0.1790		
NSGAI R 50	3.1036	2.4188	5.5615	17.2248	0.1559	0.4129	11.74
NSGAI R 500	3.1257	2.4056	5.9779	17.4705	0.1800	0.3585	10.29
SMP SO Estándar 50	3.0003	2.4700	4.6610	13.0291	0.1540		
SMP SO Estándar 500	2.9852	2.4770	5.3341	14.0070	0.1153		
SMP SO R 50	2.6517	2.1372	3.6512	13.3616	0.0978	0.3486	11.62
SMP SO R 500	2.5788	2.0368	3.6532	12.0675	0.0963	0.4064	13.61
SPEA2 Estándar 50	3.5355	2.7531	8.1311	17.1664	0.1419		
SPEA2 Estándar 500	3.5693	2.7720	8.6383	17.4532	0.1694		
SPEA2 R 50	2.9013	2.2956	4.5984	13.8640	0.1220	0.6342	17.94
SPEA2 R 500	2.8848	2.2634	4.9172	17.1022	0.1705	0.6845	19.18
<i>ER</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 50	2.2414	2.0406	1.7095	7.2080	0.1778		
GDE3 Estándar 500	2.2151	1.9792	1.7973	7.9260	0.1906		
GDE3 R 50	1.7377	1.4774	1.2113	8.0372	0.1475	0.5037	22.47
GDE3 R 500	1.6898	1.4391	1.1502	9.8391	0.2492	0.5253	23.71
NSGAI Estándar 50	3.2782	2.8782	4.1620	11.7183	0.3764		
NSGAI Estándar 500	3.2218	2.8396	3.9204	10.3059	0.5174		
NSGAI R 50	2.3574	1.8957	2.6618	13.6454	0.2226	0.9208	28.09
NSGAI R 500	2.4131	1.9347	2.8278	12.7251	0.3254	0.8088	25.10
SMP SO Estándar 50	2.2734	2.0715	1.7791	8.5019	0.1924		
SMP SO Estándar 500	2.2214	1.9823	1.8428	9.4168	0.1856		
SMP SO R 50	1.7898	1.5613	1.1944	7.8135	0.1465	0.4836	21.27
SMP SO R 500	1.7292	1.4726	1.1369	7.3514	0.1673	0.4922	22.16
SPEA2 Estándar 50	3.3930	2.9864	4.6114	11.1002	0.3866		
SPEA2 Estándar 500	3.4997	3.0256	4.9300	10.6332	0.4390		
SPEA2 R 50	2.1043	1.7013	2.1454	12.1727	0.1652	1.2887	37.98
SPEA2 R 500	2.1150	1.6708	2.2699	9.5162	0.3057	1.3847	39.57

Tabla B.14: Método de Evaluación con Remuestreo (capítulo 6). 100 generaciones. 50 y 500 individuos.  $ED_{E(R)}$  y  $ED_{\sigma^2}$ .

$ED_{E(R)}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 50	2.3611	1.6462	4.9511	17.3856	0.0524		
GDE3 Estándar 500	2.3049	1.6170	5.2808	18.4708	0.0956		
GDE3 R 50	2.1115	1.5660	4.1723	18.0967	0.0562	0.2497	10.57
GDE3 R 500	2.0585	1.4638	4.1474	16.6937	0.0618	0.2463	10.69
NSGAI Estándar 50	2.7712	2.1038	6.3418	19.8372	0.1104		
NSGAI Estándar 500	2.7325	2.0185	6.5186	19.6189	0.1221		
NSGAI R 50	2.3642	1.7128	4.9870	19.5372	0.1008	0.4069	14.68
NSGAI R 500	2.3608	1.6772	5.0239	19.8476	0.1165	0.3717	13.60
SMPSO Estándar 50	2.3818	1.6638	5.0255	17.8224	0.0953		
SMPSO Estándar 500	2.3184	1.5989	5.4472	18.9868	0.0846		
SMPSO R 50	2.1505	1.6012	4.2819	18.2151	0.0241	0.2313	9.71
SMPSO R 500	2.0980	1.5187	4.2338	16.7791	0.0272	0.2204	9.51
SPEA2 Estándar 50	2.8170	2.1199	6.8779	20.6350	0.0851		
SPEA2 Estándar 500	2.8577	2.0905	7.3355	20.9388	0.0997		
SPEA2 R 50	2.1824	1.5975	4.0903	17.1224	0.0911	0.6346	22.53
SPEA2 R 500	2.1723	1.5249	4.3734	20.4506	0.1077	0.6854	23.98
$ED_{\sigma^2}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 50	0.0173	0.0087	0.0015	0.4163	0.0011		
GDE3 Estándar 500	0.0169	0.0084	0.0017	0.4470	0.0009		
GDE3 R 50	0.0155	0.0076	0.0014	0.4243	0.0008	0.0018	10.51
GDE3 R 500	0.0152	0.0073	0.0014	0.4153	0.0004	0.0017	10.27
NSGAI Estándar 50	0.0200	0.0097	0.0017	0.4517	0.0016		
NSGAI Estándar 500	0.0198	0.0096	0.0019	0.4529	0.0017		
NSGAI R 50	0.0171	0.0082	0.0014	0.4390	0.0009	0.0029	14.74
NSGAI R 500	0.0170	0.0079	0.0014	0.4201	0.0009	0.0028	14.26
SMPSO Estándar 50	0.0173	0.0087	0.0016	0.4276	0.0020		
SMPSO Estándar 500	0.0170	0.0085	0.0017	0.4591	0.0009		
SMPSO R 50	0.0157	0.0077	0.0015	0.4360	0.0003	0.0017	9.66
SMPSO R 500	0.0154	0.0074	0.0014	0.4165	0.0005	0.0016	9.28
SPEA2 Estándar 50	0.0202	0.0100	0.0019	0.4755	0.0014		
SPEA2 Estándar 500	0.0208	0.0102	0.0021	0.4803	0.0016		
SPEA2 R 50	0.0157	0.0075	0.0012	0.4015	0.0010	0.0045	22.44
SPEA2 R 500	0.0159	0.0074	0.0012	0.4474	0.0010	0.0049	23.70

## B.4. Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo

Tabla B.15: Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo (capítulo 7). 300 generaciones. 100 y 500 individuos. *EE* y *ST*

<i>EE</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 100	1.5023	1.3088	1.5464	7.9288	0.0207		
GDE3 Estándar 500	1.4807	1.1839	1.6799	8.8533	0.0244		
GDE3 RT 100	1.0784	0.6893	1.2798	11.6568	3.72e-05	0.4239	28.22
GDE3 RT 500	1.1001	0.6798	1.3447	11.0162	2.19e-05	0.3806	25.71
NSGAI Estándar 100	2.3085	1.8162	4.0051	10.2655	0.0186		
NSGAI Estándar 500	2.2613	1.8071	3.9781	9.7755	0.0144		
NSGAI RT 100	1.2475	0.6753	2.2778	9.7192	0.0009	1.0609	45.96
NSGAI RT 500	1.2216	0.6357	2.5894	14.5442	0.0007	1.0397	45.98
SMP SO Estándar 100	1.5422	1.3459	1.6191	9.0421	0.0140		
SMP SO Estándar 500	1.4939	1.2324	1.7256	13.4899	0.0253		
SMP SO RT 100	1.0092	0.7212	0.9752	9.0229	2.92e-05	0.5330	34.56
SMP SO RT 500	1.0234	0.7044	0.9181	7.0118	3.21e-05	0.4705	31.49
SPEA2 Estándar 100	2.5151	1.8400	5.1104	10.4459	0.0071		
SPEA2 Estándar 500	2.5196	1.8162	5.1751	10.1081	0.0066		
SPEA2 RT 100	1.1604	0.5719	2.6003	14.0349	0.0006	1.3548	53.86
SPEA2 RT 500	1.1016	0.5270	2.4888	12.5185	0.0006	1.4180	56.28
<i>ST</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 100	5.2374	4.9701	7.1750	18.6305	0.4692		
GDE3 Estándar 500	5.1506	4.7763	6.9177	18.3755	0.7646		
GDE3 RT 100	3.3866	2.9915	3.7320	12.4623	0.2842	1.8507	35.34
GDE3 RT 500	3.3691	3.0426	3.9137	14.0454	0.2017	1.7815	34.59
NSGAI Estándar 100	6.6015	6.1866	13.2826	27.3433	2.0247		
NSGAI Estándar 500	6.5078	6.1306	13.0883	26.9369	2.0019		
NSGAI RT 100	2.8409	2.5916	2.4011	15.2105	0.3130	3.7605	56.96
NSGAI RT 500	2.6528	2.4189	2.3038	12.7360	0.2917	3.8550	59.24
SMP SO Estándar 100	5.2941	5.0380	7.3206	19.4461	0.4926		
SMP SO Estándar 500	5.2076	4.8454	7.0554	17.4739	0.5596		
SMP SO RT 100	3.2691	2.8540	3.7328	16.0995	0.2778	2.0251	38.25
SMP SO RT 500	3.2402	2.8408	3.7394	19.1182	0.3182	1.9674	37.78
SPEA2 Estándar 100	7.3817	7.0365	20.5659	35.4782	2.0131		
SPEA2 Estándar 500	7.4009	7.0380	20.8347	35.4924	2.1680		
SPEA2 RT 100	2.4005	2.1282	2.0279	13.0077	0.2513	4.9813	67.48
SPEA2 RT 500	2.2201	1.8669	2.2534	13.2790	0.2792	5.1808	70.00



Tabla B.16: Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo (capítulo 7).  
300 generaciones. 100 y 500 individuos.  $UR$  y Riesgo Extremos.

$UR$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 100	3.3639	2.9217	5.4962	15.8114	0.2808		
GDE3 Estándar 500	3.3427	2.8714	6.0005	15.7393	0.2755		
GDE3 RT 100	2.6902	2.2049	4.2270	13.8171	0.0292	0.6738	20.03
GDE3 RT 500	2.6886	2.1756	4.6265	16.1085	0.0018	0.6541	19.57
NSGAII Estándar 100	3.4944	2.7394	7.7496	17.5181	0.1633		
NSGAII Estándar 500	3.4788	2.7252	7.9201	17.2441	0.1783		
NSGAII RT 100	2.5998	1.9840	4.5112	16.6970	0.1654	0.8946	25.60
NSGAII RT 500	2.5265	1.9556	4.2799	18.4289	0.1242	0.9523	27.37
SMPSO Estándar 100	2.9983	2.4818	4.8749	13.4350	0.1372		
SMPSO Estándar 500	2.9953	2.4891	5.3718	13.6484	0.1163		
SMPSO RT 100	2.2530	1.7940	2.9352	11.9878	0.0848	0.7453	24.86
SMPSO RT 500	2.2702	1.7245	3.0980	12.5915	0.0821	0.7250	24.21
SPEA2 Estándar 100	3.5820	2.7871	8.4906	17.3489	0.1568		
SPEA2 Estándar 500	3.5859	2.7953	8.6577	17.1964	0.1640		
SPEA2 RT 100	2.4155	1.8368	4.0106	14.3630	0.1468	1.1665	32.56
SPEA2 RT 500	2.3506	1.7922	4.1225	15.9627	0.1010	1.2352	34.45
$ER$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 100	2.2251	1.9650	1.7524	7.9564	0.1374		
GDE3 Estándar 500	2.2279	1.9722	1.8898	8.9476	0.2065		
GDE3 RT 100	1.6400	1.2607	1.5680	11.0694	0.0733	0.5851	26.29
GDE3 RT 500	1.6970	1.2665	1.6804	12.0783	0.1201	0.5310	23.83
NSGAII Estándar 100	3.2704	2.8821	4.0447	10.9086	0.4118		
NSGAII Estándar 500	3.2148	2.8235	3.8975	10.2510	0.4512		
NSGAII RT 100	1.8342	1.2661	2.5161	9.4734	0.1754	1.4361	43.91
NSGAII RT 500	1.7640	1.1865	2.6789	14.0758	0.1291	1.4508	45.13
SMPSO Estándar 100	2.2743	2.0864	1.8380	9.3156	0.1458		
SMPSO Estándar 500	2.2303	1.9779	1.8379	13.6113	0.1971		
SMPSO RT 100	1.4501	1.1920	1.0694	9.2621	0.1083	0.8242	36.24
SMPSO RT 500	1.4872	1.2325	1.0194	6.1458	0.1476	0.7431	33.32
SPEA2 Estándar 100	3.5231	3.0392	4.9719	10.9751	0.4222		
SPEA2 Estándar 500	3.5315	3.0472	4.9711	10.5238	0.5447		
SPEA2 RT 100	1.6972	1.0870	2.7639	13.5409	0.1598	1.8259	51.83
SPEA2 RT 500	1.5991	1.0266	2.5787	12.0967	0.1266	1.9324	54.72

Tabla B.17: Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo (capítulo 7).  
300 generaciones. 100 y 500 individuos.  $ED_{E(R)}$  y  $ED_{\sigma^2}$ .

$ED_{E(R)}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 100	2.3402	1.6234	5.1018	18.2089	0.1018		
GDE3 Estándar 500	2.3072	1.5979	5.2571	18.6171	0.0906		
GDE3 RT 100	1.8742	1.3028	3.8342	17.3825	0.0044	0.4660	19.91
GDE3 RT 500	1.8920	1.2828	4.0006	19.7572	0.0015	0.4151	17.99
NSGAI Estándar 100	2.7586	2.0887	6.2987	19.9708	0.1304		
NSGAI Estándar 500	2.7288	2.0203	6.4921	19.6591	0.1302		
NSGAI RT 100	1.8960	1.2699	3.9655	19.0669	0.1227	0.8626	31.27
NSGAI RT 500	1.8183	1.1712	3.7121	20.8673	0.0645	0.9104	33.36
SMP SO Estándar 100	2.3789	1.6414	5.2605	17.9790	0.0959		
SMP SO Estándar 500	2.3200	1.6212	5.3737	18.5834	0.0915		
SMP SO RT 100	1.8385	1.3342	3.4666	16.5657	0.0019	0.5404	22.72
SMP SO RT 500	1.8474	1.2963	3.4138	17.2772	0.0017	0.4726	20.37
SPEA2 Estándar 100	2.8700	2.1222	7.1529	20.8498	0.1108		
SPEA2 Estándar 500	2.8709	2.1006	7.3153	20.6679	0.1117		
SPEA2 RT 100	1.7568	1.1155	3.6243	17.6994	0.0537	1.1132	38.79
SPEA2 RT 500	1.6933	1.0220	3.7884	19.4709	0.0514	1.1776	41.02
$ED_{\sigma^2}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 100	0.0171	0.0086	0.0016	0.4394	0.0004		
GDE3 Estándar 500	0.0169	0.0084	0.0017	0.4507	0.0008		
GDE3 RT 100	0.0139	0.0066	0.0013	0.4346	7.81e-06	0.0031	18.36
GDE3 RT 500	0.0141	0.0064	0.0013	0.4594	5.35e-05	0.0028	16.54
NSGAI Estándar 100	0.0198	0.0097	0.0017	0.4600	0.0016		
NSGAI Estándar 500	0.0198	0.0096	0.0019	0.4528	0.0018		
NSGAI RT 100	0.0140	0.0058	0.0013	0.4295	0.0005	0.0058	29.33
NSGAI RT 500	0.0134	0.0056	0.0012	0.4619	0.0003	0.0064	32.42
SMP SO Estándar 100	0.0173	0.0086	0.0016	0.4353	0.0016		
SMP SO Estándar 500	0.0169	0.0085	0.0017	0.4506	0.0012		
SMP SO RT 100	0.0135	0.0065	0.0012	0.4044	3.32e-05	0.0039	22.25
SMP SO RT 500	0.0134	0.0063	0.0012	0.4185	7.17e-05	0.0035	20.46
SPEA2 Estándar 100	0.0207	0.0102	0.0020	0.4782	0.0014		
SPEA2 Estándar 500	0.0208	0.0103	0.0021	0.4742	0.0016		
SPEA2 RT 100	0.0128	0.0052	0.0011	0.4065	0.0004	0.0079	38.14
SPEA2 RT 500	0.0125	0.0049	0.0013	0.4675	0.0002	0.0083	39.81

Tabla B.18: Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo (capítulo 7).  
150 generaciones. 100, 200 y 500 individuos. *EE* y *ST*.

<i>EE</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 100	1.5128	1.3191	1.6166	9.8008	0.0204		
GDE3 Estándar 200	1.4931	1.2741	1.6763	11.1520	0.0261		
GDE3 Estándar 500	1.4699	1.2235	1.6244	9.0019	0.0258		
GDE3 RT 100	1.1233	0.7365	1.3637	11.6820	7.69e-05	0.3895	25.75
GDE3 RT 200	1.1228	0.7108	1.4644	10.4575	3.06e-05	0.3703	24.80
GDE3 RT 500	1.1539	0.6999	1.5819	10.3279	2.83e-05	0.3159	21.49
NSGAI Estándar 100	2.2997	1.8126	3.9485	10.6896	0.0008		
NSGAI Estándar 200	2.2853	1.8263	3.9960	10.1990	0.0167		
NSGAI Estándar 500	2.2632	1.8071	3.9926	9.7996	0.0134		
NSGAI RT 100	1.2692	0.6676	2.4480	9.7746	0.0006	1.0305	44.81
NSGAI RT 200	1.2595	0.6707	2.3849	10.0729	0.0009	1.0258	44.89
NSGAI RT 500	1.2504	0.6634	2.4856	9.9782	0.0013	1.0128	44.75
SMPSO Estándar 100	1.5193	1.3503	1.5116	7.5561	0.0105		
SMPSO Estándar 200	1.5215	1.3093	1.6422	9.2495	0.0019		
SMPSO Estándar 500	1.4907	1.2490	1.7705	12.1397	0.0282		
SMPSO RT 100	1.0090	0.7035	0.9611	7.8744	3.21e-05	0.5103	33.59
SMPSO RT 200	1.0238	0.7014	1.0642	11.4333	0.0009	0.4978	32.71
SMPSO RT 500	1.0254	0.7108	0.9700	9.3500	3.29e-05	0.4653	31.21
SPEA2 Estándar 100	2.4949	1.8314	5.0292	10.4585	0.0009		
SPEA2 Estándar 200	2.4972	1.7786	5.0758	10.2291	0.0075		
SPEA2 Estándar 500	2.5111	1.7435	5.1603	10.0941	0.0067		
SPEA2 RT 100	1.1969	0.6307	2.3621	11.0153	0.0009	1.2980	52.03
SPEA2 RT 200	1.1816	0.6334	2.4344	13.6276	0.0006	1.3156	52.68
SPEA2 RT 500	1.1786	0.6060	2.4451	11.5290	0.0009	1.3325	53.07
<i>ST</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 100	5.2283	4.9531	7.2331	17.2737	0.4989		
GDE3 Estándar 200	5.1722	4.8840	6.7918	18.8671	0.6485		
GDE3 Estándar 500	5.1294	4.7822	6.6829	18.8507	1.3052		
GDE3 RT 100	3.4407	3.0291	3.9596	20.4118	0.3188	1.7876	34.19
GDE3 RT 200	3.4157	3.0496	3.8339	15.2679	0.3135	1.7566	33.96
GDE3 RT 500	3.3980	3.0167	4.1566	15.0546	0.2797	1.7315	33.76
NSGAI Estándar 100	6.6008	6.1870	13.2936	27.2372	2.0857		
NSGAI Estándar 200	6.5429	6.1637	13.0338	29.9858	2.1947		
NSGAI Estándar 500	6.5172	6.1617	13.0398	27.2729	2.1127		
NSGAI RT 100	2.8839	2.5924	2.5171	13.3727	0.2478	3.7169	56.31
NSGAI RT 200	2.8300	2.6042	2.3740	13.9126	0.2431	3.7129	56.75
NSGAI RT 500	2.7174	2.5204	2.2058	15.3802	0.3002	3.7998	58.30
SMPSO Estándar 100	5.2763	4.9447	7.4463	18.6016	0.5361		
SMPSO Estándar 200	5.2407	4.9652	7.0228	17.9278	0.6291		
SMPSO Estándar 500	5.1979	4.9189	6.8696	17.8510	1.2930		
SMPSO RT 100	3.3220	2.9576	3.8261	19.6448	0.2684	1.9543	37.04
SMPSO RT 200	3.2461	2.8906	3.6242	17.3301	0.3150	1.9946	38.06
SMPSO RT 500	3.2195	2.8616	3.6505	16.0909	0.2820	1.9784	38.06
SPEA2 Estándar 100	7.2942	6.9842	19.4471	33.5883	1.8171		
SPEA2 Estándar 200	7.3282	7.0010	19.9614	34.8007	2.3580		
SPEA2 Estándar 500	7.3785	7.0260	21.3427	36.7863	2.1971		
SPEA2 RT 100	2.6236	2.3266	2.6007	15.0975	0.3004	4.6706	64.03
SPEA2 RT 200	2.6070	2.2946	2.4568	14.2059	0.2352	4.7212	64.43
SPEA2 RT 500	2.5288	2.1925	2.8142	18.8195	0.2956	4.8497	65.73

Tabla B.19: Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo (capítulo 7).  
150 generaciones. 100, 200 y 500 individuos. *UR* y *ER*.

<i>UR</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 100	3.3432	2.9162	5.4001	14.2208	0.2854		
GDE3 Estándar 200	3.3543	2.9009	5.7804	15.3544	0.2770		
GDE3 Estándar 500	3.3457	2.8806	5.9740	14.7956	0.2418		
GDE3 RT 100	2.7406	2.2060	4.5080	14.7394	0.0075	0.6026	18.03
GDE3 RT 200	2.7539	2.2240	4.6358	14.8334	0.0144	0.6004	17.90
GDE3 RT 500	2.7101	2.1897	4.7480	15.2084	0.0217	0.6355	19.00
NSGAI Estándar 100	3.4935	2.7269	7.7389	17.2267	0.1636		
NSGAI Estándar 200	3.4892	2.7210	7.8631	17.2200	0.1690		
NSGAI Estándar 500	3.4809	2.7324	7.9320	17.2562	0.1766		
NSGAI RT 100	2.6309	2.0612	4.4575	16.5194	0.1608	0.8626	24.69
NSGAI RT 200	2.5765	2.0258	4.2048	17.1356	0.1740	0.9127	26.16
NSGAI RT 500	2.5771	2.0101	4.4989	18.5534	0.1193	0.9037	25.96
SMP SO Estándar 100	2.9843	2.4871	4.7301	13.1978	0.1206		
SMP SO Estándar 200	2.9902	2.4730	5.0647	13.2233	0.1193		
SMP SO Estándar 500	2.9788	2.4726	5.2033	15.2218	0.1168		
SMP SO RT 100	2.2585	1.7675	2.9863	12.7865	0.0873	0.7258	24.32
SMP SO RT 200	2.2634	1.7628	3.0395	12.0993	0.0868	0.7268	24.30
SMP SO RT 500	2.2639	1.7597	3.0218	12.3709	0.0461	0.7149	24.00
SPEA2 Estándar 100	3.5693	2.7922	8.4483	17.4727	0.1559		
SPEA2 Estándar 200	3.5734	2.7806	8.5139	17.1715	0.1609		
SPEA2 Estándar 500	3.5791	2.7751	8.6437	17.3155	0.1650		
SPEA2 RT 100	2.4883	1.8903	3.9908	13.3690	0.1495	1.0809	30.28
SPEA2 RT 200	2.4865	1.9361	4.1341	16.6037	0.1209	1.0869	30.42
SPEA2 RT 500	2.4715	1.8940	4.0618	14.2423	0.1324	1.1077	30.95
<i>ER</i>	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 100	2.2320	1.9945	1.8232	10.1301	0.1446		
GDE3 Estándar 200	2.2202	1.9667	1.8515	11.2504	0.1486		
GDE3 Estándar 500	2.2118	1.9776	1.7961	9.1178	0.2210		
GDE3 RT 100	1.6954	1.3238	1.6525	10.1298	0.0454	0.5366	24.04
GDE3 RT 200	1.7094	1.3244	1.7104	9.0515	0.0636	0.5108	23.01
GDE3 RT 500	1.7506	1.2983	1.8792	9.5212	0.1615	0.4612	20.85
NSGAI Estándar 100	3.2617	2.8577	3.9892	11.2920	0.4098		
NSGAI Estándar 200	3.2445	2.8619	3.9709	10.7491	0.4217		
NSGAI Estándar 500	3.2170	2.8285	3.9091	10.2810	0.5179		
NSGAI RT 100	1.8585	1.2546	2.6855	9.4791	0.2081	1.4032	43.02
NSGAI RT 200	1.8355	1.2558	2.5580	9.8330	0.1468	1.4090	43.43
NSGAI RT 500	1.8105	1.2339	2.6106	9.8246	0.1834	1.4065	43.72
SMP SO Estándar 100	2.2429	2.0326	1.7331	7.6994	0.1215		
SMP SO Estándar 200	2.2522	2.0030	1.8170	9.0102	0.2229		
SMP SO Estándar 500	2.2263	1.9839	1.8901	12.2460	0.1947		
SMP SO RT 100	1.4575	1.1810	1.0723	7.4432	0.0980	0.7854	35.02
SMP SO RT 200	1.4863	1.2207	1.1406	9.7555	0.1064	0.7659	34.01
SMP SO RT 500	1.5094	1.2416	1.0545	8.0071	0.1984	0.7169	32.20
SPEA2 Estándar 100	3.4999	3.0082	4.9043	10.9786	0.4247		
SPEA2 Estándar 200	3.5068	3.0522	4.9153	10.7129	0.4333		
SPEA2 Estándar 500	3.5198	3.0425	4.9526	10.5152	0.4652		
SPEA2 RT 100	1.7454	1.1979	2.4763	10.2685	0.1614	1.7545	50.13
SPEA2 RT 200	1.7315	1.1786	2.5270	13.1637	0.2049	1.7753	50.62
SPEA2 RT 500	1.7166	1.1431	2.5352	10.7123	0.1815	1.8033	51.23

Tabla B.20: Método de Marcado de Tiempo con Remuestreo (capítulo 7).  
150 generaciones. 100, 200 y 500 individuos.  $ED_{E(R)}$  y  $ED_{\sigma^2}$ .

$ED_{E(R)}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 100	2.3528	1.6402	5.1396	17.8524	0.0960		
GDE3 Estándar 200	2.3321	1.6207	5.3395	18.2068	0.0992		
GDE3 Estándar 500	2.3007	1.6061	5.2512	18.4658	0.0944		
GDE3 RT 100	1.9200	1.3382	4.0374	17.9556	0.0083	0.4328	18.40
GDE3 RT 200	1.9221	1.3228	4.1848	18.4633	0.0101	0.4100	17.58
GDE3 RT 500	1.8997	1.3178	3.9201	18.8461	0.0078	0.4010	17.43
NSGAI Estándar 100	2.7522	2.0847	6.2893	19.6181	0.1160		
NSGAI Estándar 200	2.7442	2.0571	6.4213	19.6315	0.1276		
NSGAI Estándar 500	2.7295	2.0160	6.5030	19.6778	0.1237		
NSGAI RT 100	1.9147	1.2282	4.0256	18.8971	0.0570	0.8376	30.43
NSGAI RT 200	1.8840	1.2687	3.7141	19.6003	0.0524	0.8602	31.35
NSGAI RT 500	1.8745	1.2284	3.9102	21.0291	0.0702	0.8550	31.32
SMPSO Estándar 100	2.3621	1.6453	5.0669	18.1158	0.1024		
SMPSO Estándar 200	2.3571	1.6202	5.3043	18.0436	0.0963		
SMPSO Estándar 500	2.3165	1.6095	5.3562	18.2761	0.0920		
SMPSO RT 100	1.8417	1.3467	3.3690	17.5158	0.0017	0.5204	22.03
SMPSO RT 200	1.8444	1.3169	3.3641	15.0968	0.0547	0.5127	21.75
SMPSO RT 500	1.8356	1.3072	3.3242	17.1286	0.0019	0.4809	20.76
SPEA2 Estándar 100	2.8584	2.1194	7.1171	20.9909	0.1013		
SPEA2 Estándar 200	2.8586	2.0971	7.1498	20.6439	0.1058		
SPEA2 Estándar 500	2.8660	2.0907	7.3125	20.8022	0.0992		
SPEA2 RT 100	1.8222	1.1955	3.5524	16.7257	0.0538	1.0362	36.25
SPEA2 RT 200	1.8021	1.1710	3.6971	19.9590	0.0342	1.0566	36.96
SPEA2 RT 500	1.7949	1.1312	3.6890	17.5349	0.0563	1.0712	37.37
$ED_{\sigma^2}$	Media	Mediana	Varianza	Máximo	Mínimo	Est-R	% mejora
GDE3 Estándar 100	0.0171	0.0085	0.0016	0.4315	0.0012		
GDE3 Estándar 200	0.0172	0.0085	0.0016	0.4406	0.0012		
GDE3 Estándar 500	0.0168	0.0084	0.0017	0.4471	0.0008		
GDE3 RT 100	0.0144	0.0067	0.0014	0.4072	4.41e-05	0.0028	16.07
GDE3 RT 200	0.0144	0.0066	0.0015	0.4522	6.47e-05	0.0028	16.16
GDE3 RT 500	0.0140	0.0065	0.0013	0.4563	0.0001	0.0028	16.70
NSGAI Estándar 100	0.0198	0.0097	0.0018	0.4416	0.0016		
NSGAI Estándar 200	0.0199	0.0097	0.0019	0.4521	0.0017		
NSGAI Estándar 500	0.0198	0.0096	0.0019	0.4545	0.0018		
NSGAI RT 100	0.0142	0.0060	0.0013	0.4313	0.0006	0.0056	28.22
NSGAI RT 200	0.0136	0.0058	0.0011	0.4413	0.0002	0.0062	31.38
NSGAI RT 500	0.0138	0.0057	0.0012	0.4612	0.0005	0.0060	30.37
SMPSO Estándar 100	0.0172	0.0086	0.0016	0.4373	0.0016		
SMPSO Estándar 200	0.0172	0.0085	0.0016	0.4364	0.0011		
SMPSO Estándar 500	0.0169	0.0085	0.0017	0.4440	0.0010		
SMPSO RT 100	0.0136	0.0065	0.0012	0.4173	8.13e-05	0.0036	21.05
SMPSO RT 200	0.0135	0.0065	0.0012	0.3859	4.47e-05	0.0037	21.39
SMPSO RT 500	0.0134	0.0065	0.0011	0.4110	0.0003	0.0035	20.77
SPEA2 Estándar 100	0.0206	0.0101	0.0020	0.4816	0.0015		
SPEA2 Estándar 200	0.0207	0.0103	0.0020	0.4738	0.0016		
SPEA2 Estándar 500	0.0208	0.0103	0.0021	0.4779	0.0016		
SPEA2 RT 100	0.0132	0.0055	0.0011	0.4015	0.0002	0.0074	35.90
SPEA2 RT 200	0.0132	0.0054	0.0012	0.4450	0.0003	0.0075	36.20
SPEA2 RT 500	0.0132	0.0053	0.0012	0.4144	0.0005	0.0076	36.59